

CAPÍTULO 1 - Introdução:

Propriedades básicas do campo geomagnético, do campo magnético solar e a modelagem desses campos usando equações de baixa ordem.

Os campos magnéticos do Sol e da Terra apresentam variabilidade em diversas escalas temporais e espaciais. Como exemplos no caso terrestre temos reversões do campo geomagnético, variação secular, jerks geomagnéticos e arqueomagnéticos, superchrons, excursões geomagnéticas e lóbulos de fluxos magnético que podem ser aproximadamente fixos no espaço ou se mover. No caso do Sol temos o ciclo associado às manchas solares, reversão do dipolo magnético do Sol, modulações nos ciclos solar, incluindo o mínimo de Maunder.

Os campos magnéticos terrestre e solar têm em comum o fato que suas origens se dão através de um processo de dínamo. Em ambos os casos a amplificação dos campos magnéticos se dá devido à sua interação com o escoamento de um fluido condutor, que converte energia cinética em energia magnética.

A rotação tem um importante papel na dinâmica dos campos magnéticos do Sol e da Terra, pois a força de Coriolis induz movimentos ciclônicos nos fluidos gerando helicidade e conseqüentemente o chamado efeito alfa (ver Parker, 1955 e Brandenburg, 2005). Por este motivo ambos os campos magnéticos são dominantes nas grandes escalas.

Um dos ingredientes principais dos movimentos de grande escala na presença de forte rotação são as chamadas ondas de Rossby. Descobertas inicialmente no contexto da atmosfera e do oceano terrestre (Rossby, 1939), ondas de Rossby surgem devido à perturbações na vorticidade potencial (que pode ser pensada como momento angular) de uma parcela de fluido, podendo ser causada devido à variação da força de Coriolis com a latitude, ou devido à variações na espessura de uma camada de fluido na presença de rotação (ondas de Rossby topográficas).

No caso do núcleo externo terrestre e do plasma solar, além da força de Coriolis, os movimentos de grande escala são afetados fortemente pela rotação, desta forma ondas de Rossby são alteradas pela força magnética (ver Hide, 1966 e Zaqarashvili et al., 2007). Estas ondas serão então chamadas de ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas, podendo ser pensadas como um híbrido de ondas de Rossby hidrodinâmicas e ondas de Alfvén.

Nesta tese estaremos preocupados em modelar variações no campo geomagnético e no campo magnético solar a partir de modelos de dimensão baixa. Estes modelos tem como ingrediente principal a interação não linear entre ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas.

Neste capítulo apresentaremos um resumo sobre a fenomenologia dos campos magnéticos terrestre e solar, apresentando fenômenos relevantes no contexto da tese. Por fim, apresentaremos uma motivação de por que utilizar modelos de baixa dimensão.

1.1 Propriedades básicas do campo geomagnético

O interesse da humanidade pelo campo geomagnético tem longa data. Alguns dos primeiros trabalhos do que se considera ciência moderna versam sobre este assunto, entre eles o trabalho de William Gilbert, De Magnete, de 1600. Em seu trabalho Gilbert propôs que a Terra era um ímã gigante.

Contudo, Edmund Halley descobriu que o campo geomagnético variava com o tempo, portanto a possibilidade de o campo geomagnético ser resultado de um ímã estático foi descartada.

Uma explicação satisfatória para a origem do campo geomagnético só foi obtida no início do século XX. Joseph Larmor, em 1919, propôs que o campo magnético das estrelas é gerado por um processo de dínamo. Assim, foi natural adaptar essa hipótese para o problema do campo geomagnético já que se sabia que o núcleo da Terra é composto por um fluido condutor.

Medidas do Campo

Há diversas fontes de informação sobre o campo geomagnético, fontes com precisão bastante variável e que dão informações do campo em diferentes épocas.

Tanto rochas sedimentares quanto ígneas têm capacidade de registrar o campo magnético na época de sua formação. Em rochas ígneas, o campo é registrado, pois durante sua formação as altas temperaturas fazem com que a agitação térmica impeça que haja uma magnetização fixa (magnetização remanente), e em seguida o material resfria, quando a temperatura se torna menor que a temperatura de Curie do material ele se torna ferromagnético, e sua magnetização permanece alinhada ao campo magnético existente durante seu resfriamento.

Em rochas sedimentares as partículas que a formam tendem a estar alinhadas estatisticamente com o campo durante sua deposição, fazendo com que o campo macroscópico da rocha esteja alinhado com o campo magnético presente na sua formação.

Em ambos os casos pode-se medir o vetor magnetização da rocha e datá-la e, assim, obter informação sobre os campos geomagnéticos antigos, que podem chegar a bilhões de anos. O campo de estudo do campo geomagnético registrado em rochas é chamado paleomagnetismo.

Em estudos deste tipo obtêm-se apenas estruturas de grande escala, em geral apenas o dipolo do campo geomagnético, mas em estudos para campos mais recentes, de poucos milhões de anos, é também possível obter componentes quadrupolares e octupolares devido à maior quantidade de dados.

Partindo-se do mesmo princípio há estudos de campos magnéticos registrados em artefatos arqueológicos, artefatos de argila e antigas fogueiras, dos quais pode-se obter medidas de campos mais recentes, de centenas à alguns milhares de anos.

Medidas diretas do campo geomagnético só passaram ser feitas nos últimos séculos, pois com o advento da navegação tornou-se necessário conhecer com certo detalhe o campo geomagnético para fins de localização. Compilações de registros de navegações dão informação mais detalhada do campo em comparação com medidas em rochas ou artefatos arqueológicos.

A partir do século XIX passou-se a fazer medições do campo geomagnético em observatórios e em expedições e a quantidade de dados cresceu enormemente, permitindo um conhecimento cada vez mais detalhado do campo geomagnético, contudo ainda havia problemas devido à má distribuição espacial dos observatórios.

Nas últimas décadas uma fonte precisa de dados tem sido os satélites, já que estes fornecem uma quantidade muito maior de dados comparado com outras fontes e fornece medidas de regiões onde havia falta de dados.

Variações do campo

Sabemos desde o século XVII que o campo geomagnético varia temporalmente. Hoje sabemos que estas variações ocorrem nas mais diversas escalas temporais, de

meses a dezenas de milhões de anos. Nesta seção discutiremos os diversos tipos de variações do campo.

Jerks Geomagnéticos

Jerks geomagnéticos, ou impulsos geomagnéticos, são caracterizados como uma variação abrupta na variação secular do campo geomagnético, sendo notada facilmente na segunda derivada da componente Y do campo.

Até a década de 70 era consenso que variações com período mais curto que 5 anos eram devidas ao campo externo, pois acreditava-se que variações mais curtas deveriam ser filtradas pelo manto. O primeiro jerk observado foi o de 1969 (Courtilot et. al.,1978), e trabalhos subseqüentes mostram a ocorrência de outros Jerks como em 1901, 1913, 1925, 1932, 1949, 1958, 1978, 1986, 1991 e 1999.

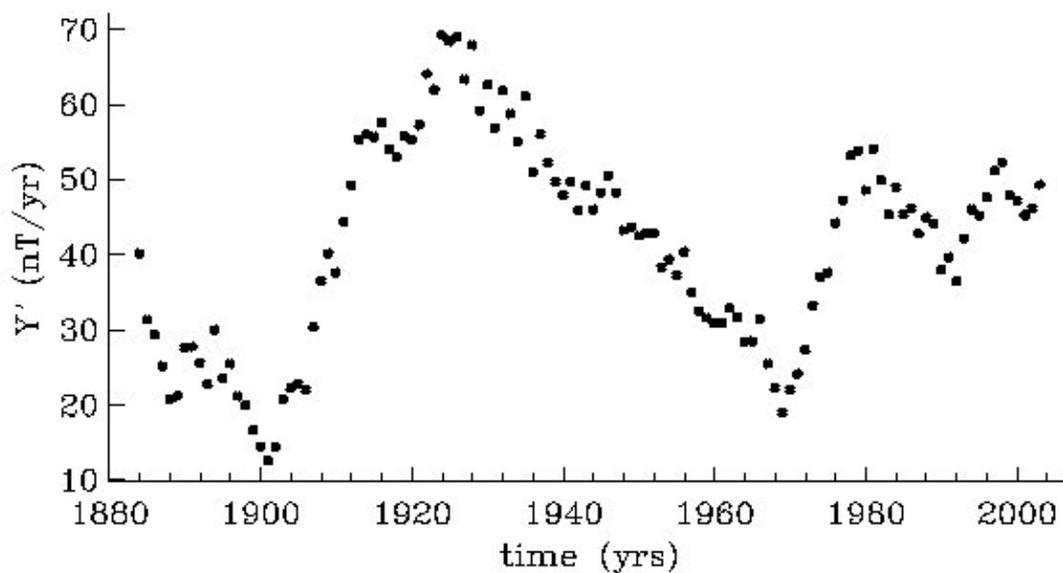


Figura1.1: Variação na componente Y mostra a ocorrência de alguns jerks, (Michelis et. al.,2005).

Uma característica notável dos jerks é que boa parte deles não é observado globalmente, ou seja, podem ser notados em observatórios em apenas algumas regiões do globo.

Outro fato interessante é que cerca de seis anos antes da ocorrência de um Jerk é observada uma variação da duração do dia na superfície da Terra, que tem consequências para o clima, como pode ser visto na figura abaixo.

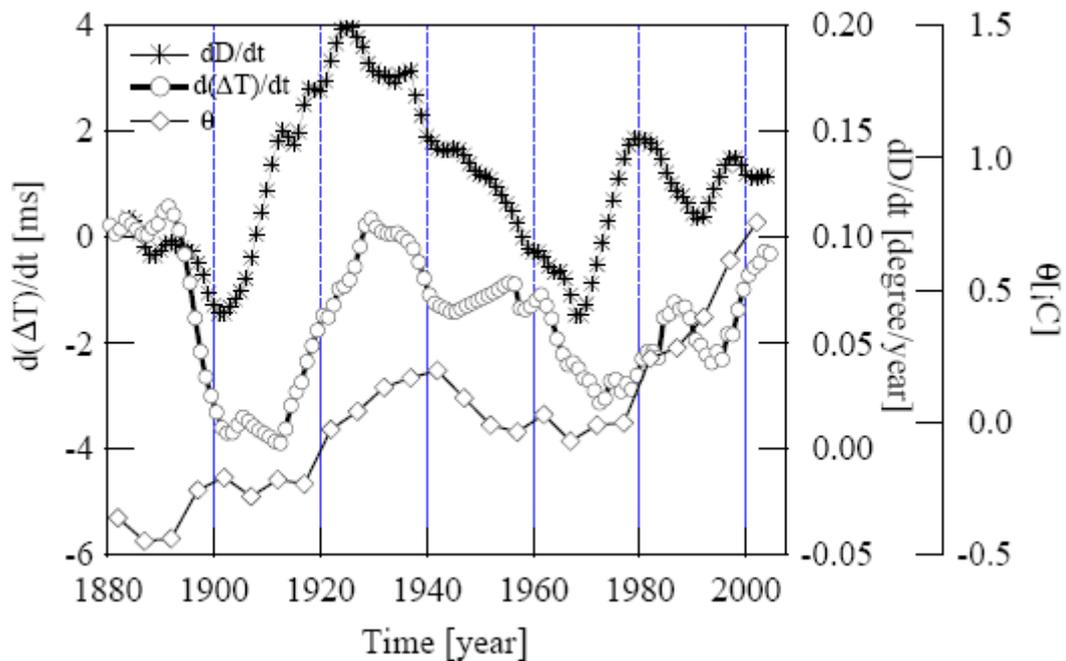


Figura1.2: Gráfico relacionando a variação da declinação magnética (D), duração do dia (θ), e variação da temperatura média na superfície terrestre (ΔT), (Michelis et. al.,2005).

A origem dos Jerks não é bem explicada. Uma sugestão é eles estejam relacionados a oscilações torcionais, que são tipos de ondas magnetohidrodinâmicas que podem ocorrer no núcleo externo da Terra. Uma das críticas a esta teoria é que oscilações torcionais são fenômenos que ocorrem globalmente e, portanto, deveriam ser observados globalmente. Um ponto a favor desta hipótese é que sabe-se que as

oscilações torcionais estão relacionadas com a variação da rotação da parte sólida da Terra.

Varição Secular

Varição secular é o nome dado às variações do campo na escala de décadas a poucos milhares de anos, ocorrendo em estruturas de diversas escalas espaciais.

Entre as características mais notáveis da variação secular está a chamada deriva para oeste, que é caracterizada pela movimentação para oeste de feições do campo geomagnético. A deriva para oeste é observada tanto em medidas recentes do campo em observatórios, satélites e navegações, quanto em medidas paleomagnéticas, ocorrendo tanto na componente dipolar como na componente não dipolar.

Um exemplo claro de deriva para oeste da componente não dipolar do campo é a trajetória da anomalia magnética do Atlântico Sul, região de baixa intensidade do campo magnético, que cruzou o oceano Atlântico nos últimos séculos [Hartmann, 2005].

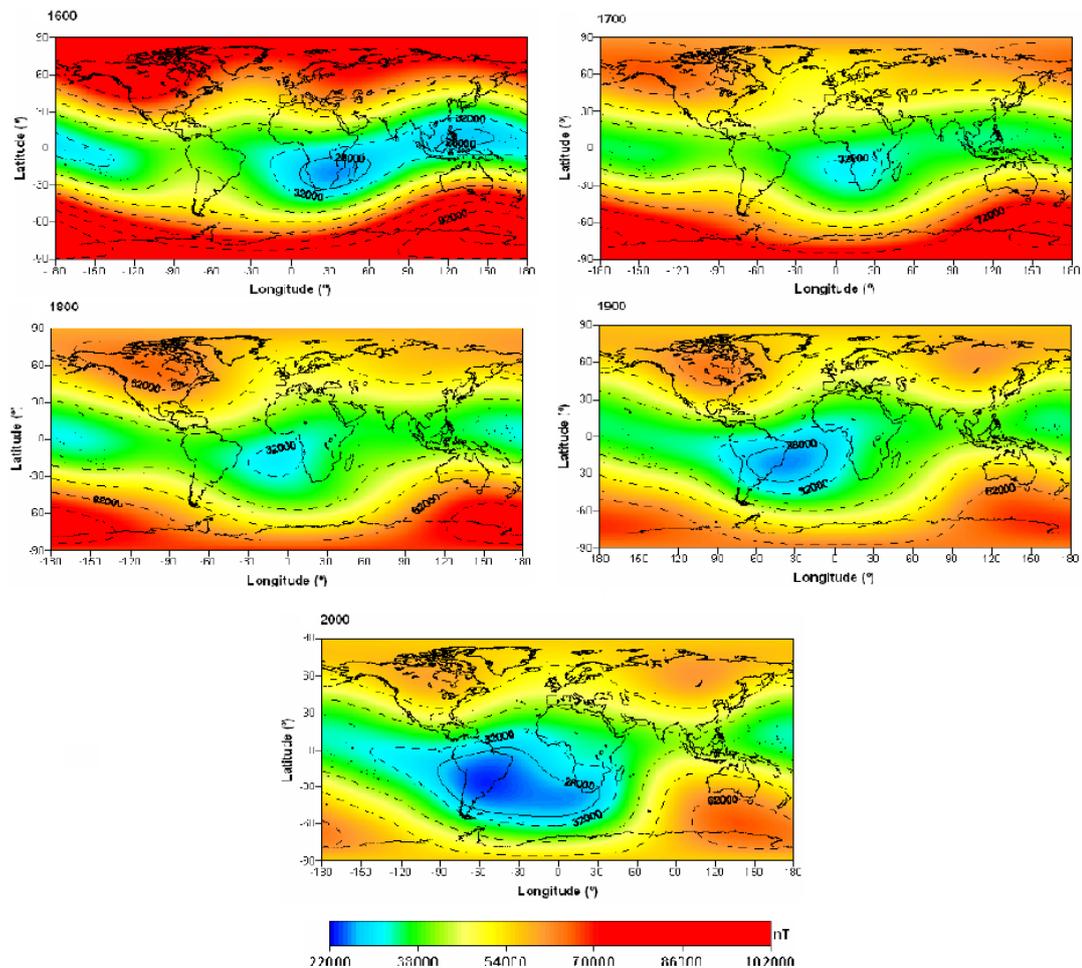


Figura1.3: Ilustração da deriva para oeste através de

mapas de intensidade do campo entre 1600 e 2000 onde se pode observar a deriva para oeste da anomalia do Atlantico Sul [Hartmann, 2005].

Diversos estudos paleomagnéticos se destinaram a estimar uma taxa média para a deriva para oeste. Apesar de haver divergências entre os trabalhos todos indicam taxas da ordem de poucos décimos de grau por ano, por exemplo (Bullard et. AL, 1950), (Yukutake & Tachinaka, 1969).

Nesta escala são observadas variações da componente dipolar do campo, tanto em direção como intensidade.

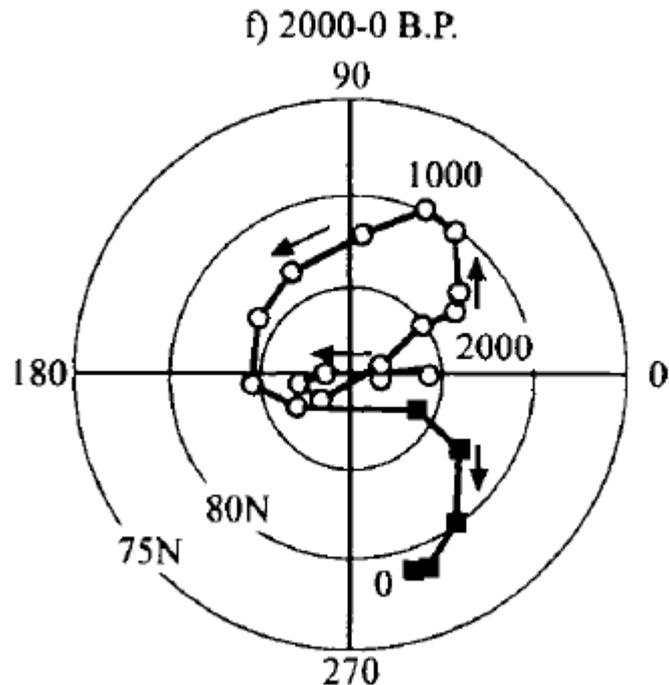


Figura 1.4 Movimentação do polo norte magnético nos últimos 2000 anos [Ohno and Hamano ,1992].

Acredita-se que a variação secular, e em particular a deriva para oeste, sejam resultado de uma combinação dos efeitos de ondas magnetohidrodinâmicas com o efeito de advecção do campo magnético pelo fluido condutor. (Hide, 1966) foi o primeiro a relacionar a variação secular a ondas magnetohidrodinâmicas, notando que certos tipos de onda se propagariam para oeste com períodos bastante semelhantes aos observados, sendo então direta a associação entre tais tipos de onda e a deriva para oeste.

Reversões

Sabe-se, desde o início do século XX, devido a medidas paleomagnéticas que o dipolo do campo geomagnético reverte de tempos em tempos. Uma das evidências mais claras da existência de reversões do campo geomagnético no passado é o padrão da magnetização medida no assoalho oceânico. O assoalho oceânico é gerado em

regiões chamadas dorsais oceânicas, onde o material novo é constantemente depositado formando o assoalho jovem e empurrando o assoalho mais antigo para as laterais. Dessa forma, o assoalho oceânico é progressivamente mais velho à medida que nos distanciamos das dorsais. Medições da magnetização remanente nas rochas do assoalho oceânico revelam um padrão zebrado, onde a magnetização é alternada em regiões cuja polaridade é igual à atual e em regiões onde a polaridade é oposta. Um esquema do padrão zebrado da magnetização do assoalho oceânico pode ser visto abaixo:

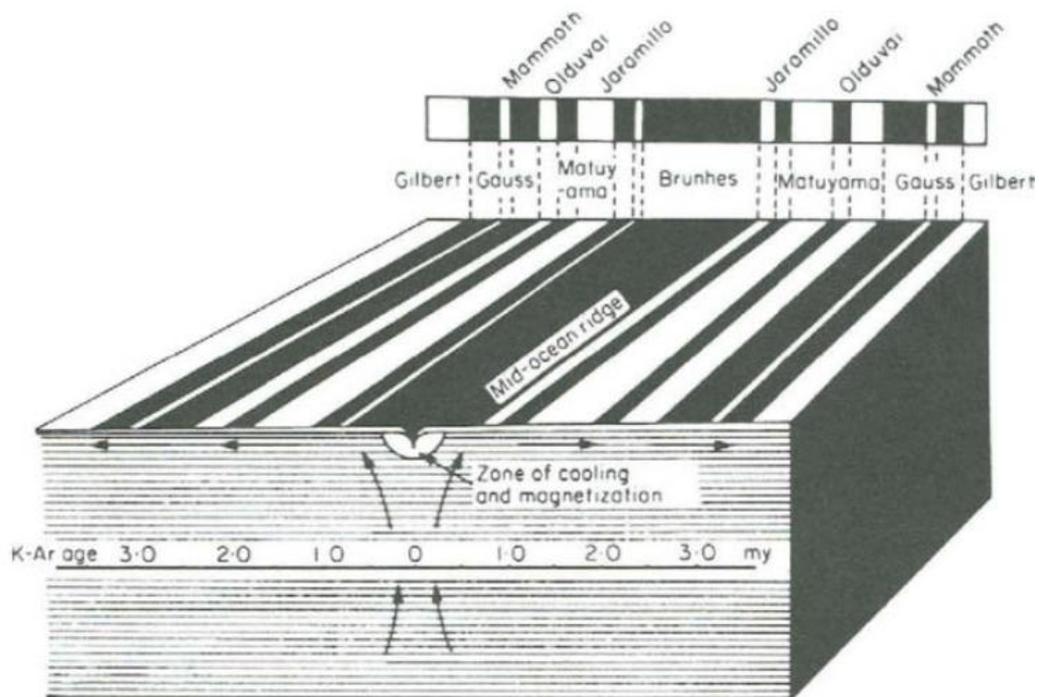


Figura 1.5: padrão zebrado de magnetização na dorsal oceânica.

O dipolo do campo geomagnético permanece a maior parte do tempo aproximadamente alinhado ao eixo de rotação da Terra. Isto é devido à predominância do dipolo axial comparado aos outros termos. Assim, uma reversão é definida como uma troca no sinal do parâmetro g_1^0 da expansão do campo em harmônicos esféricos, que é justamente o termo associado ao dipolo axial.

Em geral o pólo magnético observado de uma posição (a direção para onde aponta a bússola) não coincide com o pólo real. É dado o nome de pólo geomagnético

virtual (PGV) ao pólo magnético observado de uma determinada posição, que não é necessariamente coincidente com o pólo geomagnético real, devido à contribuição de outras componentes do campo.

O processo de reversões é bastante irregular, e aparentemente não há periodicidades no processo de reversões. Há registro de ocasiões nas quais o campo permaneceu poucos milhares de anos em uma polaridade, enquanto em outras ocasiões ele permaneceu em uma polaridade dezenas de milhões de anos, como é o caso dos superchrons.

A variabilidade da freqüência de reversões é facilmente notada ao observarmos escalas de polaridade, como a de (Cande & Kent, 1995) apresentada na figura abaixo:

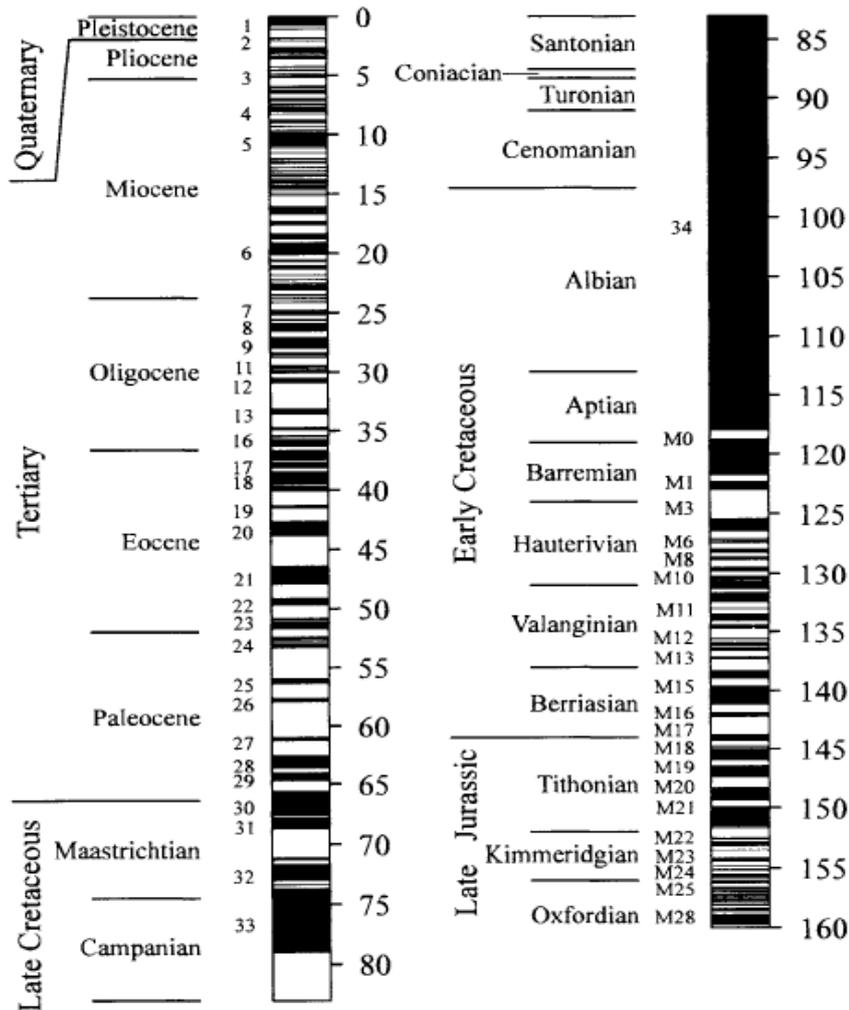


Figura: Escala de Polaridade de Cande & Kent (1995).

Notamos que entre 118 e 83 milhões de anos atrás não houve reversões, sendo este o chamado superchon do Cretáceo. Desde então tem havido um aumento na freqüência de reversões. Há ainda dois outros superchons, o superchon de Kiaman, há cerca de 250 milhões de anos e o superchon de Moyero, há cerca de 450 milhões de anos.

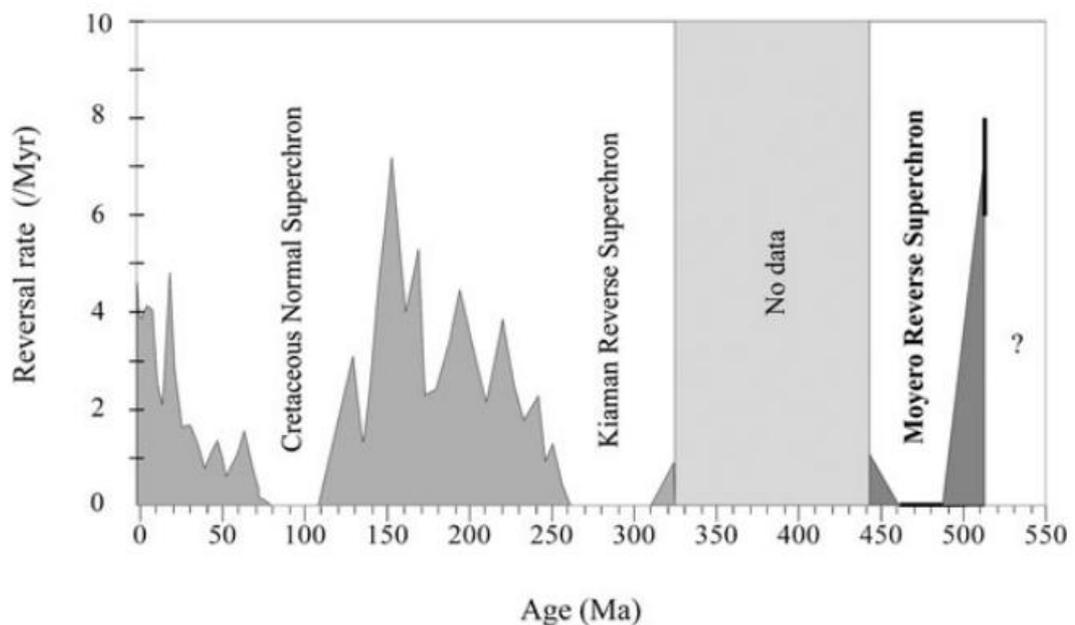


Figura 1.7 Evolução da taxa de reversões ao longo do tempo (de Pavlov ET AL, 2005).

Reversões são eventos relativamente rápidos, durando poucos milhares de anos, enquanto a permanência do dipolo em determinada polaridade é da ordem de centenas de milhares a milhões de anos. Por este motivo é difícil obter informações sobre os campos transicionais e ainda há controvérsia sobre a estrutura do campo durante as reversões, e também sobre a duração precisa de um evento de reversão.

Valet ET AL (2012), numa compilação de dados transicionais, estimou em cerca de mil anos a duração de uma reversão. Comparando ainda as características de diversas reversões os autores notaram uma característica em comum entre diferentes eventos

de reversão. Antes de cada reversão há uma queda na intensidade seguida de um aumento rápido até valores altos de intensidade do dipolo axial, seguida de uma queda brusca (por volta de mil anos) da intensidade do dipolo, que inverte de polaridade até atingir valores novamente altos de intensidade. Há então uma nova queda na intensidade até valores próximos de zero e em seguida o dipolo axial cresce e volta a flutuar ao redor de valores médios.

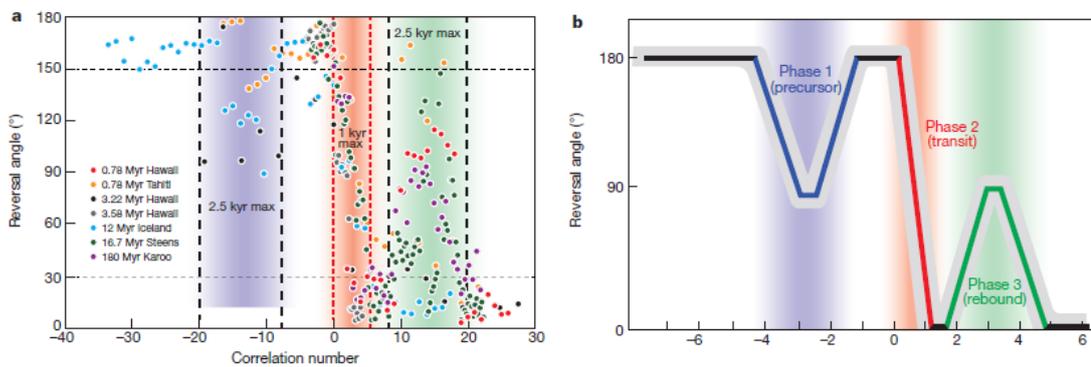


Figura 1.8 Comparação de diferentes eventos de reversão em diversas épocas e esquema da morfologia da reversão (Valet, 2012).

(Leonhardt ET AL, 2007) realizaram uma inversão bayesiana de dados transicionais, entre os chrons de Matuyama e Brunhes (a última reversão) tentando ajustar não somente os termos dipolares, como também termos de quadrupolo e octupolo aos dados. Os autores concluíram que durante o processo de reversão havia um crescimento do fluxo magnético na região equatorial, associado à componentes não dipolares, com estas “manchas” de fluxo eventualmente se movendo em direção aos polos durante a reversão.

1.2 Propriedades básicas do campo magnético solar

Manchas solares são regiões escuras que aparecem em baixas latitudes no Sol, algumas delas podendo ser observadas a olho nu da Terra. Há registros de que os chineses tinham conhecimento das manchas solares antes de Cristo, ou seja, antes do advento do telescópio. Galileu Galiei, um dos primeiros a estudar sistematicamente este fenômeno no século XVII como uma das primeiras aplicações do telescópio, determinou através de suas observações que estas manchas de fato estavam no Sol e que elas giravam junto com esta estrela.

As manchas solares podem variar muito em tamanho, da ordem de 10^3 km a 10^5 km, e são constituídas por uma região central escura chamada umbra rodeada por uma região menos escura chamada penumbra. A coloração escura das manchas solares se deve ao fato de serem regiões muito mais frias que o entorno da fotosfera solar.

Os campos magnéticos nas manchas solares são bastante intensos, podendo atingir intensidades de mais de 3 mil Gauss.

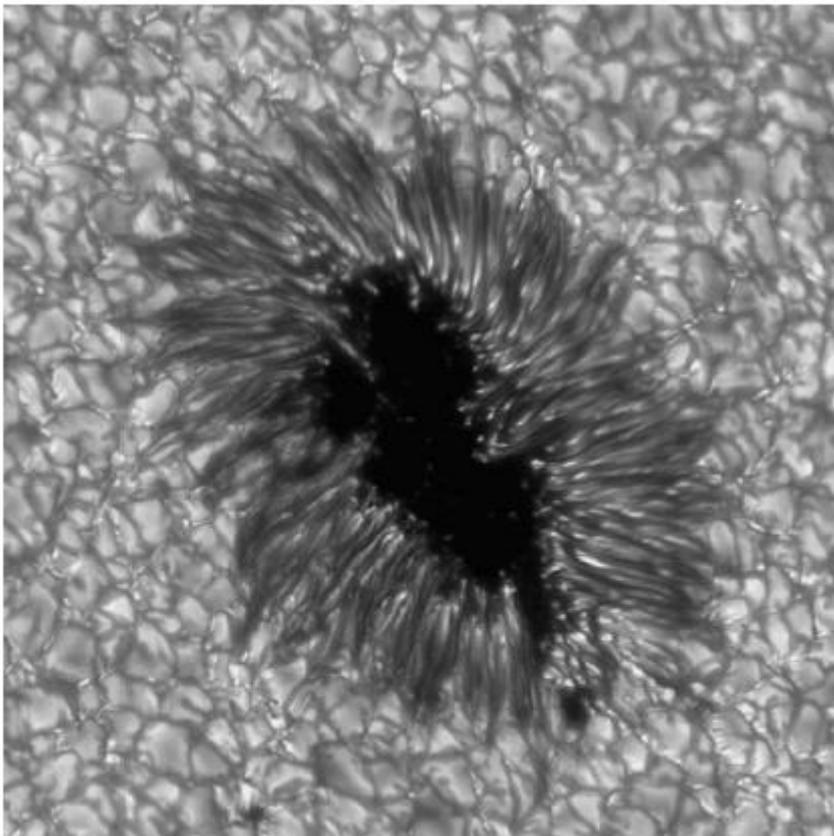


Figura 1.9: Ilustração de uma mancha solar, onde nota-se a parte central mais escura, a umbra, rodeada por uma estrutura filamentosa, a penumbra. (Thomas ET AL, 2008)

Manchas solares aparecem em ciclos de aproximadamente 11 anos, chamados ciclo de Schwabe, que é determinada observando-se a contagem de manchas solares ao longo do tempo. O ciclo de Schwabe, contudo, não é constante em intensidade (número de manchas em cada pico de atividade), e nem em duração, podendo flutuar em torno de 11 anos.

Há ainda um período mais curto, associado à rotação do Sol, que tem reflexo nas manchas solares, sendo este período conhecido como periodicidade de Rieger.

Na escala de 80 anos há uma modulação no ciclo de Schwabe de forma que o máximo de manchas observadas a cada ciclo varia nesta escala de tempo.

Foram ainda propostos ciclos de 203 anos baseados na concentração de isótopos ^{14}C e ^{36}Cl em registro e um ciclo de 2300 anos.

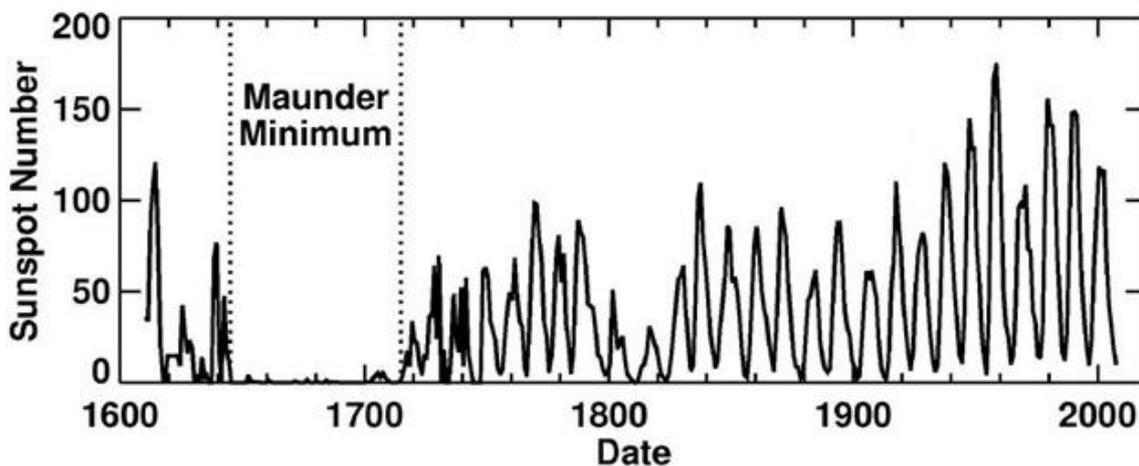


Figura 1.10: Número de manchas solares ao longo do tempo, onde nota-se a existência de um ciclo na escala de anos sobreposta por modulação na escala de cem anos. Em particular entre a metade do século XVII e início do século XVIII a atividade foi quase nula, constituindo o chamado mínimo de Maunder. (Thomas, 2008 de D.Hathaway)

Medidas da atividade solar

A forma mais comum de caracterizar a atividade solar é através da observação direta, onde entendemos por observação direta a contagem visual do número de manchas ao longo do tempo. A vantagem desta técnica é que é possível combinar registros de várias observações de astrônomos tanto profissionais quanto amadores por mais de 400 anos, obtendo uma série contínua que caracteriza a atividade solar.

O conceito de medir a atividade solar por meio do número de manchas foi proposta inicialmente por Rudolf Wolf no século XIX, fazendo uma média ponderada entre o

número de grupos de manchas observáveis e o número de manchas individuais observáveis. A limitação desta técnica é que há registro de contagens de manchas solares há poucos séculos (desde o século XVII). Dessa forma torna-se difícil a caracterização de periodicidades na atividade solar com períodos mais longos do que poucos séculos.

A atividade solar da era pré-telescópio é caracterizada através de medições de algum indicador indireto, em geral através de registros geológicos ou em anéis de crescimento de árvores.

A incidência de raios cósmicos na Terra deixa registros, principalmente relacionados a concentrações de isótopos como ^{14}C e ^{10}Be . Como a atividade solar afeta a entrada de raios cósmicos na Terra, medições na concentração destes isótopos podem ser utilizados como uma forma de determinar a atividade solar num passado mais distante, apesar destas concentrações também poderem ser afetadas pelo campo geomagnético e pelo clima.

O ciclo de Schwabe/Hale

O ciclo de Schwabe, de aproximadamente 11 anos, está associado à reversão do dipolo do campo magnético solar, cujo ciclo completo é de 22 anos, chamado ciclo de Hale. Quando a atividade solar está em seu máximo a amplitude do dipolo é mínima e está revertendo de polaridade, enquanto que quando a atividade solar é mínima o dipolo solar tem sua amplitude máxima.

No início de um ciclo manchas solares aparecem a princípio ao redor de $\pm 40^\circ$ em latitude e deriva em direção ao equador, diminuindo em torno de $\pm 5^\circ$ graus de latitude. Durante o ciclo não é uma mancha individual que se move em direção ao equador, já que estas duram por apenas cerca de um mês, mas uma “onda” de atividade solar que se propaga em direção ao equador, com manchas aparecendo progressivamente cada vez mais próximo ao equador. A evolução temporal da atividade solar caracterizada por sua propagação em direção ao equador é retratada por um diagrama latitude-tempo conhecido como diagrama de borboleta.

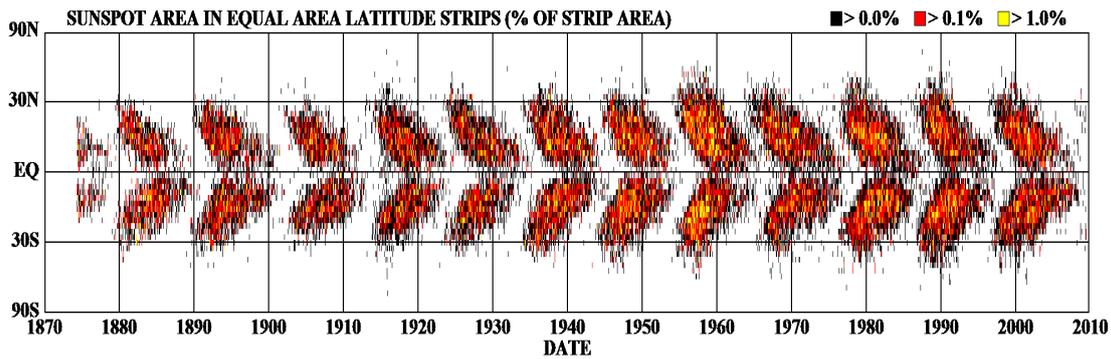


Figura 1.11: Diagrama de borboleta que representa a evolução latitudinal da atividade solar com o tempo, surgindo em torno de $\pm 35^\circ$ em latitude e migrando em direção ao equador. (Thomas, 2008, de D. Hathaway)

O ciclo de Schwabe/Hale apresenta ainda flutuações com relação a sua duração. Durante o mínimo de Maunder, entre 1650 e 1720, ciclos de Hale tiveram durações de 24, 16 e 26 anos (Raspopov ET AL, 2004).

O ciclo de Rieger

Esta é uma periodicidade de cerca de 160 dias, geralmente visível apenas durante o máximo da atividade solar de Rieger (Rieger et. AL, 1984). Ela pode ser detectada na energia das manchas solares mais energéticas, na área das manchas e número. Foi sugerido que esta periodicidade está associada com outro período de 1.3 anos na rotação diferencial na base da zona convectiva detectada por heliosismologia (Krivova, et AL 2002).

Períodos de 80, 200 e 2300 anos

O número máximo de manchas solares durante um ciclo de Schwabe apresenta modulações na escala de 80-100 anos, gerando uma sequência de “grandes máximos” e “grandes mínimos” (Usoskin, 2013). Entre os episódios de mínimo, associados a esta periodicidade, está o mínimo de Maunder que durou de 1650 a 1720, no qual a atividade solar medida pelo número de manchas solares foi quase nula (mas existente). Este grande mínimo da atividade solar é de especial interesse, pois ocorreu concomitantemente a um período especialmente frio na Terra, a pequena era do gelo, sugerindo uma possível influência da atividade solar no clima terrestre.

Na escala de 200 anos foi sugerida a existência de outra periodicidade, que pode ser observada em registros de ^{14}C e ^{36}Cl (Jager & Dahau, 2011).

O ciclo de Hallstatt tem por volta de 2300 anos e é caracterizado por uma concentração de episódios de grandes mínimos (Usoskin, 2013).

A estrutura interna do Sol

O Sol é uma estrela de idade média, aproximadamente 4,5 bilhões de anos, com raio de aproximadamente $6,955 \cdot 10^8$ m. Em seu interior há um núcleo, com raio entre 0,2 e 0,25 do raio solar, que com uma temperatura de aproximadamente $1,5 \cdot 10^7$ K é a região mais quente do Sol. Esta região é onde é gerada a energia do Sol através de reações de fusão nuclear que transformam hidrogênio em Hélio, sendo esta a razão para as altas temperaturas desta região.

Acima do núcleo existe uma camada chamada zona radiativa, estendendo-se entre 0,2/0,25 até 0,7 do raio solar. Esta região transmite o calor gerado no núcleo para regiões mais exteriores através processos radiativos, emissão e reabsorção de fótons por íons. A temperatura ao longo da zona radiativa cai de $7 \cdot 10^6$ para $2 \cdot 10^6$ K. Este gradiente de temperatura está abaixo do limite adiabático, portanto esta região não apresenta convecção. Estudos heliosismológicos indicam que a zona radiativa tem uma rotação uniforme, como um corpo sólido.

Dividindo a zona radiativa da zona convectiva, em aproximadamente 0,7 do raio solar, se encontra a tacoclina solar. A tacoclina é uma camada fina e estavelmente estratificada, apesar de ter uma espessura desconhecida (Guerrero, 2007) podendo inclusive variar com a latitude. Ela apresenta fortes gradientes radiais de velocidade, já que separa a zona radiativa que, gira como um corpo sólido, da zona convectiva.

A tacoclina, apesar de sua pequena espessura, tem uma grande importância já que acredita-se ser a principal responsável pela atividade magnética solar (DeLuca, 1986). A razão para acreditar que a tacoclina seja a camada do Sol responsável pela origem das manchas solares é que é necessária a existência de uma camada fortemente estratificada para armazenar fluxos magnéticos tão intensos quanto aqueles originados nas manchas solares.

A zona convectiva, como o próprio nome diz, apresenta forte convecção, como meio de transportar calor através de um intenso gradiente térmico. Em sua superfície a temperatura cai a cerca de $6 \cdot 10^3$ K. O material aquecido nas proximidades da tacoclina é advectado até a porção superficial do Sol como forma de homogeneizar a temperatura.

Acima da zona convectiva encontra-se a fotosfera, a camada visível do Sol. Sua temperatura é de cerca de $5 \cdot 10^3$ K e sua densidade é de cerca de $2 \cdot 10^{-4}$ Kg/m³.

Brandenburg (2005) argumenta sobre a possibilidade de a atividade solar ser gerada pela rotação diferencial nesta camada, ao invés de ser gerada na tacoclina.

A camada mais superficial do Sol é sua atmosfera, onde a temperatura nesta camada cai a cerca de 4000 K a cerca de 500 km da fotosfera e em seguida apresenta uma inversão térmica atingindo temperaturas de 20000K próximo a sua superfície a 2000 Km da fotosfera.

Modelo de Parker para as manchas solares.

Consideremos um meio fluído estratificado, sob a ação da gravidade e em equilíbrio, ou seja, a porção mais densa se localizando abaixo da porção menos densa. Em um plasma a pressão total é a soma da pressão termodinâmica e da pressão magnética, ou seja,

$$p_{\text{total}} = \frac{B^2}{2\mu_0} + p.$$

Portanto num plasma a existência de um campo magnético pode desestabilizar um fluído com perfil de densidade inicialmente estável.

O aumento do campo magnético em uma região do plasma devido, por exemplo, a um tubo de fluxo magnético horizontal, teria que ser compensado com a diminuição da pressão termodinâmica do gás, que levaria a uma expansão do mesmo e, conseqüentemente, esta porção do plasma iria emergir a camadas superiores. Considerando um plasma condutor perfeito de eletricidade, juntamente com o gás, o próprio tubo de fluxo magnético iria emergir juntamente com o plasma de forma a causar uma expulsão de fluxo magnético.

Este mecanismo é chamado de instabilidade de Parker-Reyleigh-Taylor, e foi proposto por Eugene Parker (1979), como um mecanismo para o aparecimento de manchas solares.

Neste caso, as manchas solares seriam resultado da expulsão de tubos de intenso fluxo magnético. Elas seriam escuras pelo fato de serem frias, o que resulta do fato de que a condução térmica é inibida na direção transversal às linhas de campo magnético.

1.3. Justificativa para a abordagem aqui adotada

Os dínamos do Sol e da Terra são governados pelas equações da magnetohidrodinâmica, um sistema de equações diferenciais parciais que descreve a evolução do campo de velocidades e do campo magnético do sistema em questão. Para um fluido incompressível, estas equações podem ser escritas como:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + \Omega \times \vec{u} = -g - \nabla p + \frac{1}{\mu_0 \rho} \vec{b} \cdot \nabla \vec{b} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\frac{D\vec{b}}{Dt} = \vec{b} \cdot \nabla \vec{u} + \eta \nabla^2 \vec{b}$$

$$\text{div} \vec{u} = 0$$

$$\text{div} \vec{b} = 0$$

(1.1)

onde \vec{u} é o campo de velocidades do fluido, Ω é o vetor rotação do corpo sólido sob o invólucro fluido, g é a aceleração da gravidade, p é a pressão, \vec{b} é o campo magnético, ρ a densidade, μ_0 é a permissividade magnética do meio, ν a difusividade cinemática, e η corresponde à difusividade magnética. Em (1), $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ é a chamada derivada material, sendo ∇ o operador gradiente.

Como uma equação diferencial parcial é naturalmente um sistema de dimensão infinita, o que significa a grosso modo que precisaríamos de infinitos graus de liberdade, ou infinitos comprimentos de onda para descrever a suposta solução do sistema acima representada por $\vec{u}(\vec{x}, t)$ e $\vec{b}(\vec{x}, t)$.

Entretanto, nossa abordagem será a seguinte:

(i) estudaremos soluções de linearizações de versões simplificadas do sistema (1), onde as soluções em forma de onda das equações deste sistema a serem estudadas serão as chamadas ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas.

(ii) consideraremos o sistema dinâmico resultante de interações não lineares ressonantes entre ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas. Tais ressonâncias consideradas serão apenas na primeira ordem não linear, ou seja, ressonâncias triádicas que resultam na interação de três ondas, ou tripletos.

(iii) Consideraremos conjuntos de poucas ondas ressonantes, tipicamente de três a seis ondas, organizados em conjuntos de um a três tripletos.

Apesar da enorme simplificação que os passos (i), (ii) e (iii) trazem ao sistema (1), esperamos que esta abordagem sirva para elucidar qualitativamente fenômenos intrinsecamente não lineares que ocorrem nas grandes escalas destes sistemas.

Nesta sessão apresentaremos diversos resultados que motivam o estudo de simplificações de dimensão finita do sistema (1), e que fornecem uma possível rota para uma justificativa matematicamente rigorosa da abordagem aqui adotada.

A dimensão do atrator das equações MHD.

Um atrator de um sistema dinâmico é um conjunto que tem a propriedade de que, esperando um tempo suficientemente longo, a solução do sistema irá permanecer arbitrariamente próxima deste conjunto.

Consideremos o sistema (1) com uma condição inicial dada por

$$U(t = 0) = U_0 = \begin{pmatrix} \vec{u}(0) \\ \vec{b}(0) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Vamos supor ainda que existe um operador Φ_t , responsável pela evolução do sistema, o qual chamaremos de semi-grupo de evolução para o sistema (1).

Definição: seja X um espaço de Banach, e $t \geq 0$ um número real. Um semi-grupo de operadores $\Phi_t: X \rightarrow X$ é uma família de operadores a um parâmetro (tempo) satisfazendo às seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \text{Id} \\ \Phi_{t+s} &= \Phi_t \circ \Phi_s, \quad \forall t, s \geq 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

sendo Id o operador identidade. A idéia é que Φ_t promova a evolução do sistema da seguinte forma:

$$\Phi_t(U_0) = U(t)$$

$$\Phi_s(U(t)) = U(t + s)$$

(1.4)

Daremos então uma definição mais precisa sobre o conceito de atrator.

Definição: o ômega-limite do sistema (1), para um conjunto de condições iniciais Σ , é definido por

$$\omega(\Sigma) = \{y: \exists \text{ uma sequencia } t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } x \in \Sigma \text{ vale } \Phi_{t_n}(x) \rightarrow y\}.$$

Neste sentido o conjunto ômega atrai certas orbitas do sistema, estando ligado ao conceito de atrator.

Definição: Um conjunto \mathcal{A} é chamado de atrator se é invariante pelo semigrupo, ou seja, $\Phi_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, e se existe uma vizinhança \mathcal{U} de \mathcal{A} que converge para \mathcal{A} , $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathcal{U}) = \mathcal{A}$, onde o limite é entendido no sentido de distância entre conjuntos.

O maior conjunto \mathcal{U} atraído por \mathcal{A} é chamado de bacia de atração do atrator.

O conceito de dimensão em sistemas dinâmicos pode ter diversas definições, mas em geral entendemos por dimensão de um modelo o número de seus graus de liberdade. Daremos uma definição precisa deste conceito que é bastante útil no contexto de equações de evolução dissipativas.

Definição: Se \mathcal{X} é um conjunto compacto, a dimensão fractal dele, denotada por $d_f(\mathcal{X})$, é dada por

$$d_f(\mathcal{X}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\mathcal{X}, \varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \tag{1.5}$$

onde $N(\mathcal{X}, \varepsilon)$ é o número mínimo de bolas fechadas de raio ε que recobrem \mathcal{X} .

(Temam, 1988) mostra que o atrator das equações da magnetohidrodinâmica satisfazem o seguinte teorema:

Teorema: As equações da magnetohidrodinâmica definidas num aberto limitado Ω possuem um atrator \mathcal{A} compacto e conexo que é maximal no espaço de Hilbert L^2 e o atrator \mathcal{A} atrai todos os conjuntos compactos de L^2 .

A baixa dimensão da dinâmica do dipolo nos dínamos solar e terrestre

O dipolo constitui sempre a maior escala (ou maior comprimento de onda) de um sistema magneto-hidrodinâmico, já que inexistem monopólos magnéticos. Sendo uma componente de grande escala dos dínamos, o dipolo tem uma variabilidade lenta, contudo ele está acoplado com infinitas outras componentes do sistema de menor escala. Podemos pensar na relação entre a escala espacial de um modo do sistema com sua escala temporal através de uma relação de dispersão (vide Capítulo 2, por exemplo). No nosso caso, estamos interessados na interação de ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas cuja relação de dispersão mostra claramente que para números de onda suficientemente grandes (pequenos comprimentos de onda) as ondas têm frequência muito mais lenta que uma onda dipolar.

Argumentaremos que na existência de uma separação de escalas temporal a dinâmica do dipolo não será afetada por componentes rápidas do campo numa escala de tempo longa.

Consideremos \vec{X} uma variável que descreve o sistema de interesse, tendo uma componente de variabilidade lenta e outra de variabilidade rápida, i.e.,

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

onde X é a variável lenta e Y a variável rápida. Suponhamos que a dinâmica de X é determinada pela equação diferencial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X^\varepsilon \\ Y^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon} g(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

Sendo ε um parâmetro adimensional pequeno ($\varepsilon \ll 1$).

Seja Φ_t a família de grupos a um parâmetro responsável pela evolução do sistema, então o gerador infinitesimal de Φ_t é uma matriz A tal que

$$A = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t - \text{Id}) \quad (1.8)$$

O gerador infinitesimal pode ser separado em uma parte rápida e uma parte lenta

$$A = A_x + A_y$$

$$A_x = f(x, y)\nabla_x$$

$$A_y = \frac{1}{\varepsilon}g(x, y)\nabla_y$$

(1.9)

Seja $A(x)_y$ o gerador infinitesimal da dinâmica rápida para cada x fixado. Seja μ_x uma medida invariante ergódica de $A(x)_y$. Então a média temporal do campo $f(x, y(t))$ existe em quase todo ponto e coincide com a média espacial tomada com a medida μ_x .

$$\overline{f_y(x)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, y(x, t)) dt = \int f(x, y) d\mu_x$$

(1.10)

O teorema a seguir afirma que sob certas condições no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, X^ε satisfaz as equações médias.

Teorema: Seja $f(x, y)$ uma função limitada e Lipschitz em ambas variáveis. Se o limite $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, y(x, t)) dt$ existe uniformemente no espaço e não depende de y então a família $X_{x,y}^\varepsilon$ é compacta em $C_{[0,T]}$, e qualquer ponto limite X_x^0 (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) é solução da equação média

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{X}(t))$$

$$\bar{X}(0) = x$$

(1.11)

Ainda, se a equação média tem uma única solução \bar{X} então $\sup_{[0,T]} |X_{x,y}^\varepsilon - \bar{X}| \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para todo T .

Por que considerar apenas a interação entre modos ressonantes?

Um possível efeito da não linearidade em uma equação de evolução não linear é promover o acoplamento entre diferentes modos do sistema, gerando troca de energia entre estes modos. Mas quaisquer modos podem trocar energia?

Um resultado que pode ajudar a elucidar esta pergunta é um teorema demonstrado por Henri Poincaré, chamado de teorema de linearização de campos vetoriais de Poincaré.

Seja $M(x)$ um campo vetorial em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Consideremos uma expansão deste campo vetorial em forma de uma série de potências formal, sem nos preocuparmos a princípio com a convergência desta série:

$$M(x) = Ax + \dots \tag{1.12}$$

onde A é uma matriz com n autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Consideremos uma n -upla de números inteiros a_1, a_2, \dots, a_n .

Definição: dizemos que A apresenta ressonância de ordem k se existe uma n -upla de números naturais a_1, a_2, \dots, a_n , tal que

$$\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i = 0$$

Com

$$\sum_{i=1}^n |a_i| = k \tag{1.13}$$

Se não existe k tal que os autovalores de A satisfaçam as relações acima então o sistema é dito não ressonante.

Teorema de Poincaré: Se a os autovalores de A não são ressonantes então existe uma mudança de coordenadas $y = f(x)$ que elimina os termos não lineares. Assim, nestas coordenadas a equação

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \dots$$

escreve-se como

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

Em outras palavras, a transformação $y = f(x)$ elimina os termos não lineares da equação. Isto, a grosso modo, significa que uma equação não linear que não apresenta ressonâncias comporta-se como uma equação linear. Em particular ela não deve ser capaz de promover “acoplamento” entre diferentes modos.

Este teorema não diz nada sobre sistemas ressonantes, e em particular nada sobre truncamento na ordem da ressonância, já que estamos interessados em nos restringir a ressonâncias de ordem três do nosso sistema.

Neste sentido podemos evocar o teorema das formas normais de Birkhoff. Consideremos um sistema hamiltoniano escrito em coordenadas canônicas (p, q) , ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\end{aligned}\tag{1.14}$$

A forma normal de Birkhoff é um polinômio na variável

$$x_i = \frac{p_i^2 + q_i^2}{2}\tag{1.15}$$

Teorema: Suponha que um sistema hamiltoniano não satisfaz nenhuma ressonância de ordem $k \leq s$. Então existe um sistema de coordenadas canônico no qual a hamiltoniana \mathcal{H} pode ser reduzida a uma forma normal de Birkhoff de ordem s no entorno de um ponto de equilíbrio, i.e.,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_s + R \\ R &= O(|p|, |q|)^{s+1}\end{aligned}\tag{1.16}$$

onde \mathcal{H}_s é um polinômio de ordem s em x .

A prova no caso de dimensão finita pode ser encontrada em (Arnold, 1981), e generalizações para equações diferenciais parciais hamiltonianas são encontradas em (Grebert, 2006). De fato, as equações magnetohidrodinâmicas sem dissipação e forçantes constituem um sistema hamiltoniano (ver, por exemplo, Morrison, 1982).

Capítulo 2: Um modelo teórico para o ciclo solar

Acredita-se que o dínamo solar esteja localizado numa região chamada tacoclina, uma fina camada situada em aproximadamente 0,7 do raio solar, separando o interior radiativo do sol, que gira como corpo sólido, da zona convectiva que é composta por um fluído (plasma).

Pelo fato de a espessura da tacoclina ser muito pequena se comparada com a região do sol em que esta camada se encontra, uma aproximação razoável é considerar a dinâmica do plasma nesta camada como sendo bi-dimensional.

Baseando-se numa aproximação amplamente utilizada no estudo da atmosfera e oceano terrestre, o modelo da água rasa, Gilman (2000) introduziu sua extensão magnetohidrodinâmica, chamado modelo da água rasa magnetohidrodinâmico (água-rasa MHD).

As equações para o modelo de água-rasa MHD podem ser escritas na forma:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + f\vec{u}^\perp = -g\nabla h + \frac{1}{\mu_0\rho}\vec{b}\cdot\nabla\vec{b} + \nu\nabla^2\vec{u} \quad (2.1a)$$

$$\frac{D\vec{b}}{Dt} = \vec{b}\cdot\nabla\vec{u} + \eta\nabla^2\vec{b} \quad (2.1b)$$

$$\frac{Dh}{Dt} = h\text{div}\vec{u} \quad (2.1c)$$

Nas equações acima, o campo de velocidades bi-dimensional é dado por $\vec{u}(x, y, t) = (u_1, u_2)$, $\vec{u}^\perp(x, y, t) = (-u_2, u_1)$, o campo magnético bi-dimensional é dado por $\vec{b}(x, y) = (b_1, b_2)$, e a espessura da camada de fluído é dada por $h(x, y, t)$; g é a

aceleração da gravidade tomada como vertical e constante, e o parâmetro de Coriolis é dado por $f = f_0 + \beta y$, com ambos f_0 e β supostos constantes (aproximação do plano beta). Em (2.1), ρ é a densidade, μ_0 refere-se à permeabilidade magnética do meio, ν corresponde ao coeficiente de viscosidade cinemática e η à difusividade magnética. Em (2.1), $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ é a derivada material, sendo $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ o operador gradiente bi-dimensional.

Neste modelo assume-se que o plasma se encontra em equilíbrio magnetostático na vertical, e em seguida a pressão é integrada na coordenada vertical ao longo da camada de forma a ser substituída pela espessura da camada $h(x, y)$.

Modelo quase-geostrófico MHD com forçante convectiva.

Como estamos interessado apenas na dinâmica lenta e de grandes escalas, associadas às ondas de Rossby, convém eliminar a dependência em $h(x, y, t)$, eliminando assim as soluções em forma de onda de gravidade que aparecem no modelo de água rasa MHD (Zaqarashvili, 2007). Para tanto, tomamos o rotacional bidimensional (componente vertical do rotacional tri-dimensional) das equações (2.1a) e (2.1b). Assim, definimos então a vorticidade por

$$\xi = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

e o escalar corrente por

$$j = \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y},$$

e o sistema de cinco equações escalares (2.1a)-(2.1c) se reduz ao sistema de duas equações para a vorticidade e para a densidade de corrente magnética

$$\frac{D(f + \xi)}{Dt} + (f + \xi) \text{div} \vec{u} = \frac{1}{\mu_0 \rho} (\vec{b} \cdot \nabla j + j \text{div} \vec{b}) + \nu \nabla^2 \xi \tag{2.2a}$$

$$\frac{Dj}{Dt} = \vec{b} \cdot \nabla \xi + \xi \operatorname{div} \vec{b} + j \operatorname{div} \vec{u} + \eta \nabla^2 j \quad (2.2b)$$

Em (2.2) usamos

$$\frac{Df}{Dt} = \vec{u} \cdot \nabla f$$

Em primeira aproximação, a dinâmica das ondas de Rossby apresenta campos bidimensionais não divergentes, o que justificaria descartar os termos na equação (2) envolvendo os divergentes do campo de velocidades e do campo magnético. No entanto, neste trabalho desprezaremos somente o divergente do campo magnético, condição esta associada à inexistência de monopolo magnético, e manteremos a divergência horizontal do campo de velocidades como uma função prescrita de forma a representar uma forçante convectiva. De fato, a condição de não divergência do campo de velocidades tridimensional implica que:

$$\operatorname{div} \vec{u} = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

onde w denota a componente vertical do campo de velocidades tridimensional. Como estamos tratando de uma camada confinada de fluido, esta relação implica que uma parcela ascendente (descendente) de fluido irá gerar em algum ponto divergência horizontal do fluido. Podemos, portanto, entender a divergência horizontal de \vec{u} como uma forçante convectiva nas equações. Como não queremos entrar nas equações termodinâmicas nós manteremos a divergência horizontal do campo de velocidades como uma função prescrita $\operatorname{div} \vec{u} = K$, representando uma fonte de ondas de Rossby. Esta abordagem tem sido amplamente usada no contexto da dinâmica atmosférica (ver, por exemplo, Hoskins e Ambrizzi 1993 e referências lá apresentadas). Escrevemos finalmente as equações que serão utilizadas no presente capítulo em função do potencial vetor A e da função corrente ψ , que satisfazem às relações $\nabla^2 A = j$ e $\nabla^2 \psi = \xi$, respectivamente:

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi + f)}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2\psi + f) = \frac{1}{\mu_0\rho}J(A, \nabla^2A) + \nu\nabla^2\nabla^2\psi + K(\nabla^2\psi + f) \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial\nabla^2A}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2A) = \eta\nabla^2\nabla^2A + K\nabla^2A \quad (2.3b)$$

Em (3.3) acima, $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ para quaisquer funções f e g .

Podemos colocar as equações (2.3) no formato das equações discutidas do Capítulo 1. Neste sentido, consideramos no sistema (2.3) acima perturbações ao redor de um estado de equilíbrio que consiste de um escoamento médio em repouso e um campo magnético na direção zonal (toroidal), ou seja,

$$\vec{B}_0 = (B_0, 0)$$

$$\vec{U}_0 = (0, 0)$$

Este estado de equilíbrio representa uma solução estacionária exata das equações (2.3).

Assim, o sistema que governa a evolução temporal dessas perturbações em torno do estado de equilíbrio definido acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nabla^2\psi \\ \nabla^2A \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} + \mathcal{B} \left(\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} \right) + F(\psi, A) \quad (2.4a)$$

onde o operador linear \mathcal{L} é dado por

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \beta \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\mu_0\rho} B_0 \frac{\partial \nabla^2}{\partial x} \\ B_0 \frac{\partial \nabla^2}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4b),$$

enquanto que o operador não linear \mathcal{B} é dado por

$$\mathcal{B} \left(\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{array}{l} -(\vec{\nabla}^\perp \psi) \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 \psi + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\vec{\nabla}^\perp A) \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 A \\ -(\vec{\nabla}^\perp \psi) \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 A + (\vec{\nabla}^\perp A) \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 \psi \end{array} \right\} \quad (2.4c)$$

Na equação (2.4a), F representa o vetor que contém os termos forçante e de dissipação, ou seja,

$$F = \begin{bmatrix} K(\nabla^2 \psi + f) + \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi \\ K \nabla^2 A + \eta \nabla^2 \nabla^2 A \end{bmatrix} \quad (2.4d)$$

2.1. Teoria linear: ondas imersas num campo básico em repouso

Ondas de Rossby MHD surgem como soluções das equações (2.3) linearizadas (desprezando o termo não linear \mathcal{B}) e sem forçante e dissipação.

Portanto, as equações que governam as oscilações livres do sistema podem ser escritas na notação de operadores em termos da função de corrente ψ e do potencial vetor A como

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nabla^2 \psi \\ \nabla^2 A \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Tomando a transformada de Fourier de \mathcal{L} obtemos o operador algébrico, denominado símbolo do operador \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}^* = i \begin{bmatrix} \beta k & \frac{1}{\mu_0 \rho} B_0 k |k|^2 \\ B_0 k |k|^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Os autovalores desta matriz representam as autofrequências do sistema, e podem ser determinadas achando-se as raízes do polinômio característico:

$$\det \left(-i\omega - \frac{1}{|\vec{k}|^2} \mathcal{L}^*(i\vec{k}) \right) = 0 \quad (2.8)$$

onde, $\vec{k} = (k, l)$ é o vetor número de onda. As raízes do polinômio característico acima fornecem os dois possíveis ramos das ondas de Rossby MHD. Estas raízes são dadas por

$$\omega_{\pm} = \frac{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4v_A^2|\vec{k}|^4}\right)k}{2|\vec{k}|^2} \quad (2.9a)$$

e

$$\omega_{+} = \frac{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4v_A^2|\vec{k}|^4}\right)k}{2|\vec{k}|^2} \quad (2.9b)$$

Nas equações acima, $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho}}$ refere-se à velocidade das ondas de Alfvén. Os ramos ω_{+} and ω_{-} são os modos rápido/hidrodinâmico e lento/magnético, respectivamente.

De fato, para números de onda pequenos, $\frac{4v_A^2|\vec{k}|^4}{\beta^2} \ll 1$, as relações de dispersão podem ser aproximadas por

$$\omega_{+} \approx -\frac{\beta k}{|\vec{k}|^2} \quad (2.10a)$$

e

$$\omega_{-} \approx v_A^2 \frac{|\vec{k}|^2 k}{\beta} \quad (2.10b)$$

Portanto, neste limite de ondas longas, ω_{+} corresponde exatamente à relação de dispersão das ondas de Rossby puramente hidrodinâmicas, enquanto que nesta forma assintótica para ondas longas ω_{-} refere-se à relação de dispersão das ondas de

Alfvén. Por esta razão, chamaremos daqui adiante o modo “+” de modo hidrodinâmico e o modo “-” de modo magnético. Por outro lado, no limite de ondas curtas (números de onda pequeno), ambas as raízes tendem assintoticamente à relação de dispersão das ondas de Alfvén, i.e.

$$\omega_- \approx \omega_+ \approx v_A k = \frac{B_0 k}{\sqrt{\mu_0 \rho}},$$

Ou seja, ambas são assintoticamente não dispersivas para ondas curtas.

Usaremos aqui os valores para a velocidade das ondas de Alfvén $v_A = 200 \text{ m/s}$ e para o parâmetro de Rossby $\beta = 0,95 \cdot 10^{-13}$. O gráfico da relação de dispersão normalizada ω/Ω , para números de onda na direção y $l=1$ e $l=2$, é mostrado nas Figuras 2.1 e 2.2 para os ramos magnético e hidrodinâmico, respectivamente.

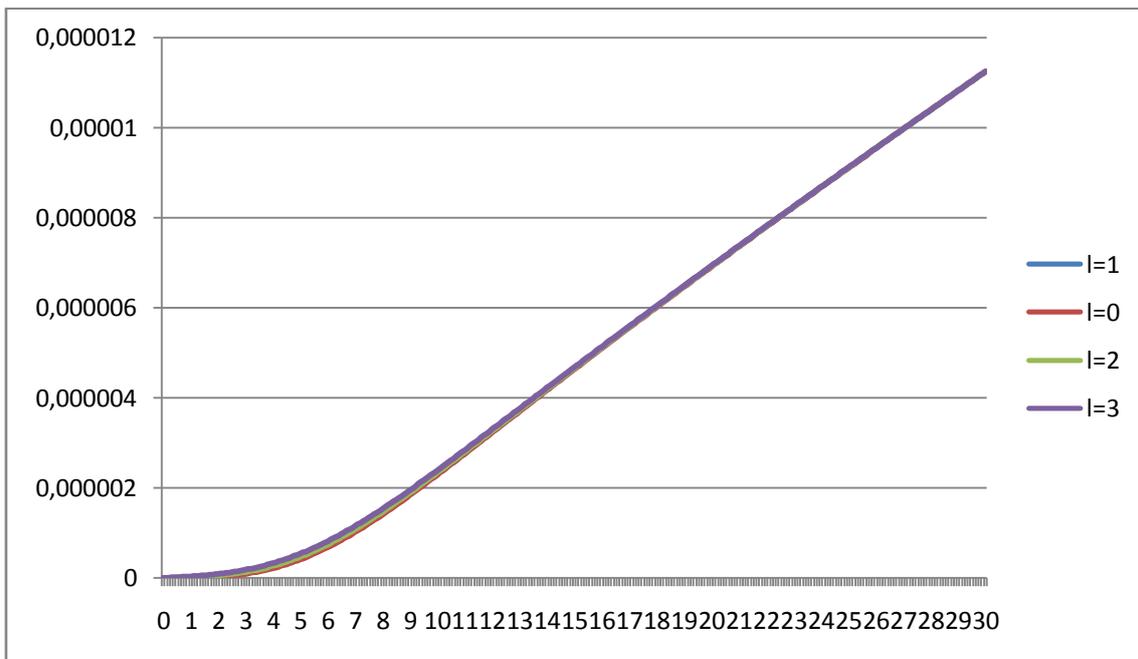


Fig 2.1: relação de dispersão normalizada para ondas de Rossby Magnéticas com número de onda meridional $l=1, l=2, l=3$.

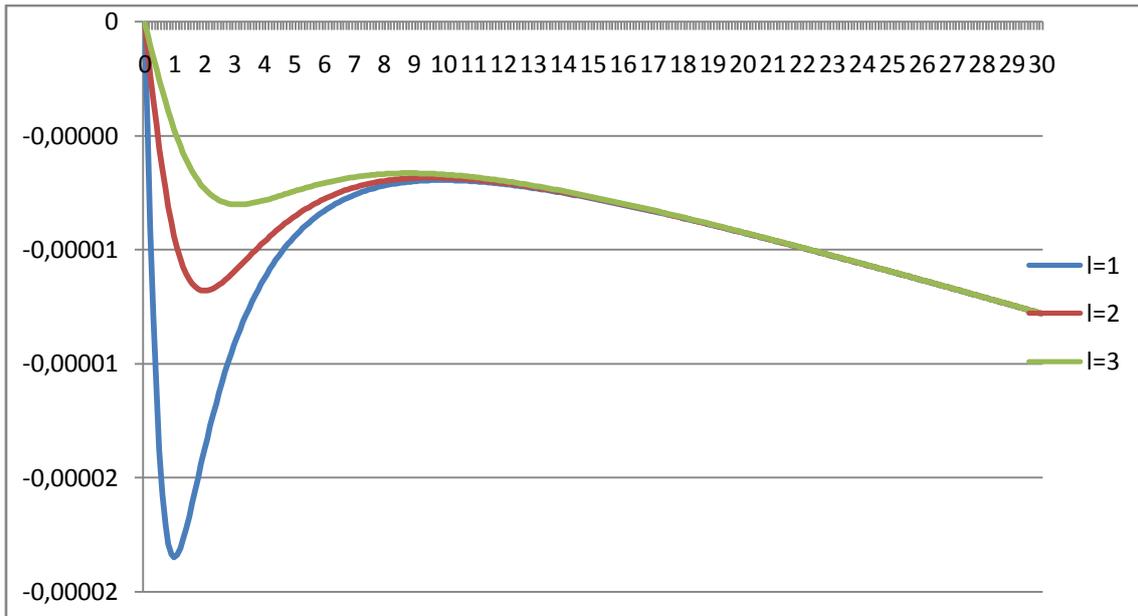


Fig. 2. 2: relação de dispersão normalizada para ondas de Rossby Magnéticas com número de onda meridional $l=1, l=2, l=3$.

Notamos que ambos os ramos, magnético e hidrodinâmico, tendem assintoticamente a uma reta que corresponde à relação de dispersão das ondas de Alfvén, que são não dispersivas.

Para valores diferentes do campo magnético de fundo o comportamento da relação de dispersão pode mudar consideravelmente. De fato, para $v_A = 500 \text{ m/s}$, que corresponde a um campo de fundo de aproximadamente 8 Tesla, vemos que a separação entre a escala temporal dos dois modos diminui.

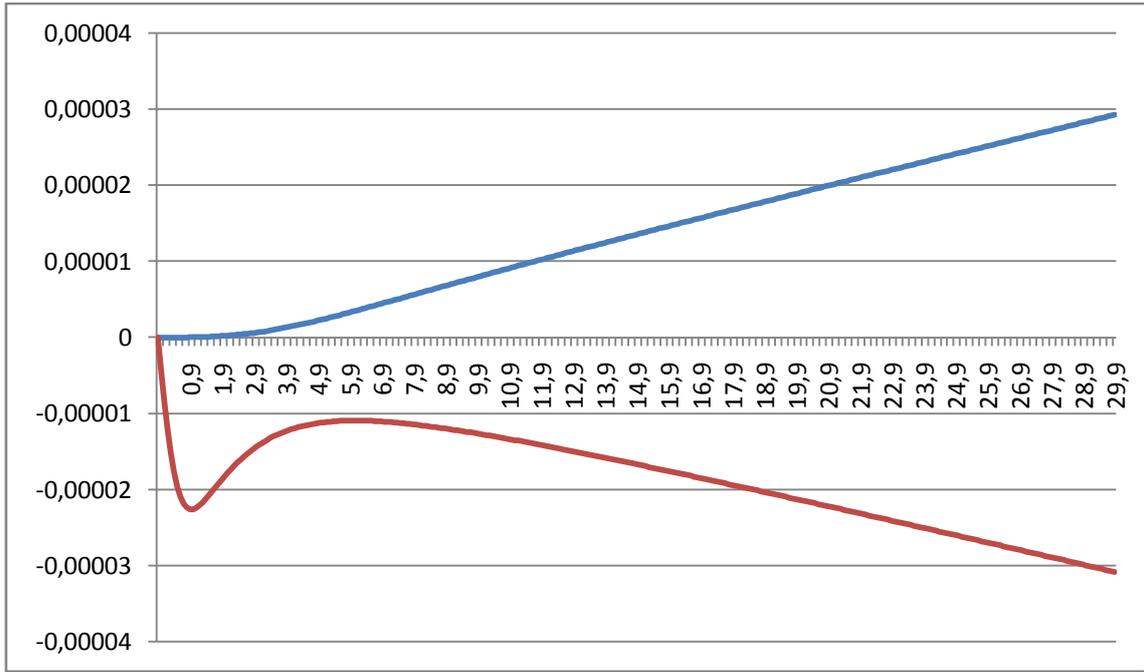


Fig. 2.3: relação de dispersão normalizada para ondas de Rossby MHD, modo rápido com número de onda meridional $l=1$.

Os correspondentes autovetores à direita da matriz $\frac{1}{|\vec{k}|^2} \mathcal{L}^*$ são dados por:

$$\vec{R}^-(\vec{k}_i) = \begin{pmatrix} \omega_-(\vec{k}_i)k_i \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (2.11a)$$

e

$$\vec{R}^+(\vec{k}_i) = \begin{pmatrix} \omega_+(\vec{k}_i)k_i \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (2.11b)$$

Para cada número de onda \vec{k} , estes autovetores formam uma base orthogonal para o espaço vetorial \mathbb{C}^2 com o produto interno apropriado definido por:

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \left(\rho \bar{u}_1 u_2 + \frac{1}{\mu_0} \bar{b}_1 b_2 \right) \quad (2.12)$$

onde $\vec{u}_1 = (u_1, b_1)$ e $\vec{u}_2 = (u_2, b_2)$ representam vetores arbitrários do espaço vetorial \mathbb{C}^2 a barra sobre as components do vetor representam o complexo conjugado do número complexo (necessário para garantir que a norma seja positivo definida). A norma definida por este produto interno representa a energia de um determinado modo, dada por

$$\|\vec{u}_1\|^2 = \left(\rho |u_1|^2 + \frac{1}{\mu_0} |b_1|^2 \right) \quad (2.13)$$

Na equação acima, o primeiro termo representa a energia cinética e o segundo termo representa a energia magnética de um determinado modo.

Guias de onda associados a jatos zonais de oeste desempenham um papel central na propagação de distúrbios associados à ondas de Rossby e, conseqüentemente, no estabelecimento de padrões de teleconexão na atmosfera terrestre (Hoskins & Ambrizzi, 1993; Hoskins & Karoly 1981).

Ainda, escoamentos médios com cisalhamento latitudinal (rotação diferencial) constituem um ingrediente essencial na dinâmica do Sol e, conseqüentemente, ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas no sol estão “imersas” num escoamento de fundo cisalhante. É, portanto, interessante explorar possíveis efeitos do cisalhamento meridional do escoamento médio na propagação das ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas com o intuito de investigar possíveis guias para ondas de Rossby no dínamo solar.

Neste contexto, consideremos distúrbios com amplitude pequena imersos em um estado básico representado por um campo magnético constante na direção x, como anteriormente, mas agora tomaremos o escoamento médio zonal (na direção x) mas variando lentamente em função da coordenada y, i.e.,

$$\vec{B}_0 = (B_0, 0)$$

$$\vec{U} = (\bar{U}(y), 0)$$

Neste caso, de acordo com a aproximação WKB linear (Majda, 2003; Hoskins & Karoly, 1981), a relação de dispersão das ondas de Rossby MHD é dada por (excluí esta sentença porque a modificação não é só pelo efeito shift-doppler, mas tem também o efeito de $U''(y)$ que modifica o beta)

$$\omega(\vec{k}, y) = \bar{U}(y)k - \frac{\left(\beta^* \pm \sqrt{\beta^{*2} + 4v_A^2|\vec{k}|^4}\right)k}{2|\vec{k}|^2} \quad (2.14)$$

onde $\beta^* = \beta - \bar{U}''(y)$ refere-se ao gradiente meridional da vorticidade absoluta do estado básico, também chamado de o parâmetro de Rossby efetivo num escoamento cisalhante.

Por simplicidade na análise, consideraremos a forma assintótica para as relações de dispersão de ondas de Rossby MHD no limite de ondas longas introduzida anteriormente. Para o ramo hidrodinâmico $\omega_+ \approx \bar{U}k - \frac{\beta^*k}{|\vec{k}|^2}$, e o número de onda total á dado por

$$K_+ = \sqrt{\frac{\beta^*}{\bar{U} - c_-}} \quad (2.15)$$

Por outro lado, para o ramo magnético $\omega_- \approx \bar{U}k - v_A^2 \frac{|\vec{k}|^2 k}{\beta^*}$, e o número de onda total é dado por

$$K_- = \sqrt{\frac{(\bar{U} - c_+) \beta^*}{v_A^2}} \quad (2.16)$$

Nas equações acima, $c_{\pm} = \omega_{\pm} / k$ denota a velocidade de fase zonal das ondas. A propagação das ondas é permitida somente nas regiões nas quais o número de onda

total K é real. Nas latitudes nas quais o número de onda total é imaginário, a solução é evanescente, ou seja, a propagação das ondas não é permitida. De fato, K_- e K_+ são os índices de refração para as ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas, respectivamente, para os ramos magnético e hidrodinâmico. .

Em geral, contudo, a velocidade de fase das ondas de Rossby é menor em magnitude que a velocidade do escoamento básico. Consequentemente, uma aproximação usual das expressões do número de onda total é considerar as ondas como sendo estacionárias, ou seja, tendo velocidade de fase nula ($c = 0$). Neste caso, o número de onda total é substituído pelo número de onda estacionário K_s . O conceito de número de onda estacionário K_s é usado frequentemente no contexto de dinâmica de fluidos geofísicos com o intuito de determinar possíveis guias de onda para ondas de Rossby imersas num escoamento básico zonal. O conceito do K_s foi aplicado com sucesso para interpretar de forma qualitativa a resposta de modelos de circulação atmosférica a forçante topográfica e/ou térmica , prevendo o caminho de propagação destes distúrbios (por exemplo, Hoskins & Karoly, 1981;; Hoskins & Ambrizzi 1993).

Nós usamos aqui um perfil teórico de rotação diferencial latitudinal tirado de MacGregor & Charbonneau (1997) para estimar o escoamento médio zonal $U(y)$. Esta expressão é dada por:

$$\Omega(\theta) = 432.8 + \frac{1}{2} [27.9 - 62.9\cos^2 \theta - 67.13 \cos^4 \theta]$$

com a a frequência sendo dada em NHz. A segunda derivada do escoamento médio é dada estimada a partir da seguinte expressão

$$\Omega''(\theta) = -\cos^2 \theta(-125,8 - 268,9\cos^2 \theta) + \sin^2 \theta(-125,8 - 805,6\cos^2 \theta)$$

As latitudes críticas que separam um fluxo médio positivo (para leste) de um fluxo negativo (para oeste) determinam um guia de ondas tanto para o modo hidrodinâmico quanto para o modo magnético já que a propagação destas ondas não é permitida na região de número de onda estacionário K_s negativo que geralmente corresponde a um fluxo zonal negativo.

Além disso, no caso particular no modo magnético a teoria WKB linear (Bühler, 2009) prevê que a trajetória seguida pelas ondas de Rossby do ramo magnético será refratada para as regiões de máximo número de onda estacionário. No caso da tacoclina solar, esta latitude correspondente ao máximo do número de onda estacionário para o ramo magnético das ondas de Rossby MHD é o equador (Fig. 2.4).

Como mostrado na Figura 2.4, o equador é a região de máximo K_s para o ramo magnético de forma que tais ondas do ramo magnético geradas em latitudes médias ou subtropicais irão propagar em direção ao equador e terão sua trajetória defletida na direção paralela ao equador na latitude de 0° . Da mesma maneira, a Figura 2.4 mostra que a latitude crítica para a propagação das ondas de Rossby lentas (magnéticas) será ao redor de 35° (sul e norte). Este resultado está em concordância com o a estrutura espacial da atividade solar representada pelo diagrama de borboleta, na qual a atividade solar surge próximo de 35° de latitude e se propaga em direção ao equador.

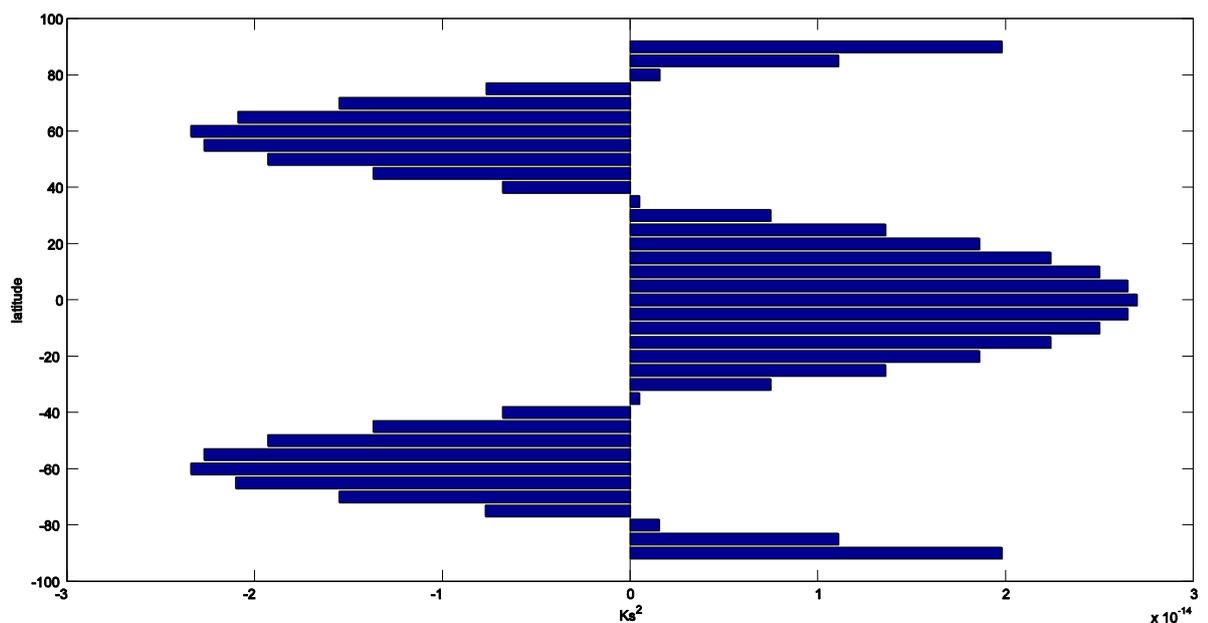


Figura 2.4: perfil latitudinal de K_s^2 , onde observamos uma guia de ondas nas latitudes em que $K_s^2 > 0$, notadamente entre -35° e 35° onde é observada a atividade solar. A propagação das ondas é refratada em direção à posição com máximos valores de K_s , a linha de 0° .

3. Teoria fracamente não linear de ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas

Para derivar a relação de dispersão das ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas (2.9) nós desprezamos o termo não linear das equações . De forma geral escrevemos as equações sem forçante e dissipação na notação de operadores como

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nabla^2 \psi \\ \nabla^2 A \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} + \mathcal{B} \left(\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} \right) \quad (2.17)$$

onde o termo não linear (bilinear) é dado por

$$\mathcal{B} \left(\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -(\vec{\nabla}^\perp \psi) \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 \psi + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\vec{\nabla}^\perp A) \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 A \\ -(\vec{\nabla}^\perp \psi) \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 A + (\vec{\nabla}^\perp A) \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 \psi \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

A aplicação de algum método assintótico, seja WKB ou da média sobre as ondas rápidas (Majda, 2003), promove a eliminação dos modos não ressonantes, simplificando consideravelmente as equações. Dados três modos com números de onda \vec{k}_1 , \vec{k}_2 e \vec{k}_3 (tal que $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$), e as relações de dispersão $\omega_{\alpha_1}(\vec{k}_1)$, $\omega_{\alpha_2}(\vec{k}_2)$ e $\omega_{\alpha_3}(\vec{k}_3)$ (onde $\alpha_i = +$ ou $-$ dependendo do tipo de relação de dispersão da onda i), com a relação de ressonância satisfeita

$$\omega_{\alpha_1}(\vec{k}_1) = \omega_{\alpha_2}(\vec{k}_2) + \omega_{\alpha_3}(\vec{k}_3),$$

podemos escrever as perturbações da função corrente e do potencial vetor como

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \psi(t) \\ A(t) \end{pmatrix} &= \Omega_1(T) \vec{R}_1 \exp(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega_{\alpha_1}(\vec{k}_1)t) + \Omega_2(T) \vec{R}_2 \exp(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega_{\alpha_2}(\vec{k}_2)t) \\
&+ \Omega_3(T) \vec{R}_3 \exp(\vec{k}_3 \cdot \vec{x} - \omega_{\alpha_3}(\vec{k}_3)t) + C.C
\end{aligned}
\tag{2.19}$$

Na equação acima, \vec{R}_i representa o autovetor à direita associado ao modo i e Ω_i a amplitude do modo i , que agora é permitida variar numa escala lenta de tempo.

Neste contexto, a evolução temporal das amplitudes na escala $T = \epsilon t$ é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_1}{dT} &= C_{(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \Omega_2 \overline{\Omega_3} \\
\frac{d\Omega_2}{dT} &= C_{(\vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_1)}^{(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)} \Omega_1 \overline{\Omega_3} \\
\frac{d\Omega_3}{dT} &= C_{(\vec{k}_3, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)} \Omega_1 \overline{\Omega_2}
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

onde os coeficientes de interação C são obtidos calculando o termo não linear nos autovetores associados a dois autovalores do operador linear e projetando-se no autovetor referente a um terceiro modo, i.e.,

$$\begin{aligned}
C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)} &= \langle \vec{L}^\alpha(\vec{k}_1 + \vec{k}_2), \mathcal{B}^* \left(\vec{R}^{\alpha_1}(\vec{k}_1), \vec{R}^{\alpha_2}(\vec{k}_2) \right) \rangle \\
&= \left\{ \left[(\vec{k}_2^\perp \cdot \vec{k}_1) \left(|\vec{k}_2|^2 - |\vec{k}_1|^2 \right) \right] (\omega_{\alpha_1}(\vec{k}_1) \omega_{\alpha_2}(\vec{k}_2) + v_A^2) \right\} \omega_{\alpha_3}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

onde \vec{L}^α é o autovetor a esquerda do operador linear.

Determinação dos tripletos ressonantes

Para encontrar tripletos ressonantes de ondas de Rossby magnéticas representativos da tacoclina solar nós utilizamos o método gráfico.

Apresentaremos alguns conjuntos de tripletos para os quais julgamos relevantes para nossa análise.

	H	H	M
k	1	18	19
l	1	2	3
frequencia (x10E-5 Hz)	-2,25	-1,23	1,02

Tabela 1: Número de onda e freqüências correspondentes a um tripleto ressonante.

Solução para as equações dos tripletos

A solução para a o sistema de EDOs que governa a interação de três ondas ressonantes pode ser obtida analiticamente em termos de funções elementares, as funções elípticas de Jacobi (Craik,1985), fornecendo soluções oscilatórias e periódicas, exceto para condições iniciais degeneradas para as quais o período é infinito (Longuet-Higgins et al, 1967).

Apresentamos os resultados para a evolução das amplitudes num tripleto ressonante misto, representado na Figura 2.5.

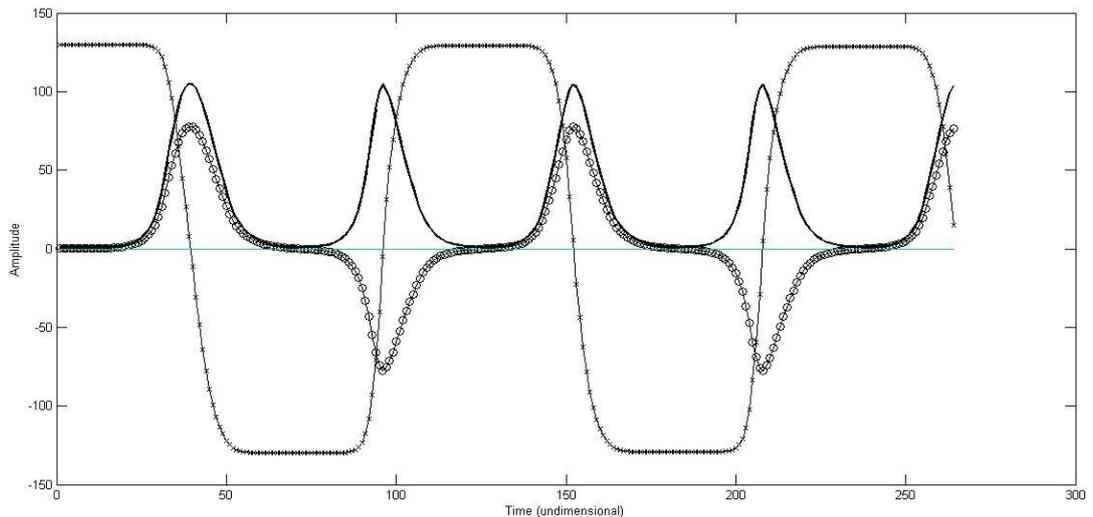


Fig. 2.5: Solução do sistema de EDOs para as amplitudes dos modos de um tripleto ressonante para o tripleto correspondente à tabela 1. Onde a curva marcada com círculo corresponde ao ramo magnético M(3,19), curva marcada com x's corresponde ao dipolo H(1,1), a curva lisa corresponde ao modo (2,18).

Na Figura 2.5 notamos que a solução é periódica, a onda com número de onda mais baixo $k=1$, representando o dipolo, oscila entre duas polaridades simétricas, então a energia começa a ser transferida para as ondas com escala espacial menor que crescem em amplitude às custas da amplitude do dipolo, quando as ondas mais curtas estão com amplitude em seu máximo a onda dipolar está em seu mínimo, em seguida elas transferem energia para o dipolo que começa a crescer em amplitude com a polaridade inversa. Estimamos a escala temporal de troca de energia para este tripleto em particular da ordem de 10 anos.

Esta sequencia apresenta vários aspectos em comum com o processo de reversão de polaridade do dínamo solar. De fato, durante o ciclo solar quando o dipolo está em seu máximo de amplitude a energia nos comprimentos de onda mais curtos, associados com as regiões de atividade das manchas solares ativas, estão no seu mínimo, portando a atividade das manchas solares é baixa nesta fase. Por outro lado, quando o dipolo tem amplitude mínima, enquanto está revertendo polaridade, a energia na escala das manchas solares é máxima.

Efeitos devido a forçantes e dissipação

Diferentes combinações de forçante e dissipação podem alterar de diversas formas as soluções inicialmente periódicas (no modelo conservativo). Alguns possíveis efeitos são (i) instabilização e conseqüente crescimento linear ou exponencial do modo instável, (ii) promover transferência não local de energia através de ressonância linear via forçantes paramétricas não homogêneas; (iii) geração de novas frequência via bifurcação que podem levar a trajetórias caóticas.

Os efeitos mencionados devem constituir um tema interessante de pesquisa, especialmente a interação entre o crescimento exponencial de campos magnéticos e a não linearidade que podem fornecer uma base física para mecanismos de saturação de crescimento de campos magnéticos, no processo denominado α -quenching (Brandenburg ET AL, 2005).

Nos restringiremos neste capítulo a um mecanismo que pode ser de particular interesse no contexto do ciclo solar. Introduzimos uma forçante constante que projeta somente no modo instável de uma interação triádica ressonante (o modo de mais alta frequência do tripleto ressonante). Para o tripleto aqui analisado, este modo corresponde à onda hidrodinâmica com numero de onda (1,1). Esta forçante constante no tempo e independente da amplitude dos modos refere-se ao termo $f \text{div} \vec{u} = fK$ da equação (2.3a). Assim, incluindo na equação (2.17)

uma fonte convectiva de ondas de Rossby referente somente ao termo $f \operatorname{div} \vec{u} = fK$ da equação (2.3a) e prescrevendo este termo de forma que projete somente no modo instável do tripleto ressonante (modo 1 – modo dipolar), as equações reduzidas para as amplitudes dos modos do tripleto ressonante são dadas por

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_1 \Omega_2 \overline{\Omega_3} + F_1$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_2 \Omega_1 \overline{\Omega_3}$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = C_3 \Omega_1 \overline{\Omega_2}$$

(2.22)

No sistema acima, C_1 , C_2 e C_3 referem-se aos coeficientes de interação dados 2.20 por e F_1 corresponde à projeção no modo 1 da forçante representada por

$$F = \left[\begin{matrix} fK(x, y, t) \\ 0 \end{matrix} \right]$$

(2.23)

De acordo com a teoria de tripletos ressonantes na presença de forçantes periódicas (Raupp e Silva Dias 2009; Harris et al. 2012), esta situação na qual a forçante é ressonante somente com o modo instável do tripleto corresponde à única forma da energia permanecer limitada no tempo. A Fig. 2.6 mostra a variação temporal da amplitude dos modos referente à integração do sistema acima para o mesmo tripleto e condição inicial da Fig. 2.5. Como ilustrado na Fig. 2.6, a solução continua aproximadamente periódica, contudo há uma assimetria no crescimento-decrescimento das amplitudes das ondas. Esta assimetria também constitui um aspecto observado durante um ciclo solar.

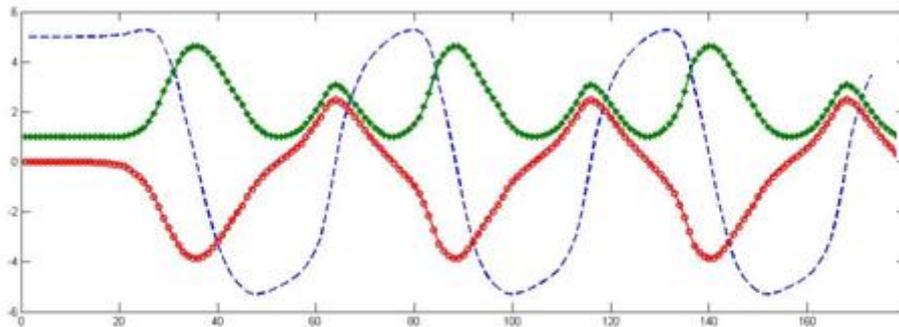


Fig. 2.6: Similar à Fig. 2.5, mas com a inclusão de uma forçante convectiva projetando somente no modo dipolar H(1,1) (curva azul), em vermelho o modo magnético M(19,3) e em verde o modo H(18, 2)

Discussão

Durante um ciclo solar ambos campos dipolares e campos magnéticos de menor escala espacial associados às manchas solares oscilam com frequência de aproximadamente 11 anos, sugerindo que estas duas escalas espaciais estão acopladas. Em nossa análise mostramos que a não linearidade é capaz de promover este acoplamento entre as escalas “pequenas” e as escalas maiores. Em particular, considerando efeitos tanto devido a um campo toroidal quanto à rotação nós mostramos que as amplitudes de diferentes modos de Rossby MHD que surgem neste sistema podem oscilar periodicamente com frequências da mesma ordem de grandeza do ciclo solar em função do acoplamento não linear ressonante desses modos.

A possibilidade de um ciclo solar na qual a frequência de oscilação do ciclo está associada ao período de troca não linear de energia das ondas de Rossby então é sugerida, pois quando a onda dipolar está em seu máximo de amplitude, ondas de menor escala possivelmente ressonantes com o dipolo estão em seu mínimo de amplitude. A partir deste período o dipolo passa a transferir energia para estas ondas de menor escala espacial que iriam consequentemente crescer em amplitude. Enquanto estas ondas crescem em amplitude sua propagação passaria a ser observada. A região equatorial seria naturalmente a região preferencial de propagação destas ondas, já que nesta região o índice de refração destas ondas é máximo, o que pode ser visto na distribuição latitudinal do número de onda estacionário. As ondas poderiam eventualmente aparecer próximos à linha crítica onde $K_s \approx 0$, localizada em aproximadamente 35° de latitude, e deveria propagar e ser refratada em direção ao equador, onde o número de onda estacionário K_s é máximo.

Enquanto a onda se propaga ela perturba o campo magnético ao seu redor, podendo possivelmente disparar instabilidades do tipo Parker-Reyleigh-Taylor. Isto poderia explicar o aparecimento de manchas solares enquanto as ondas se propagam no guia de ondas equatorial.

O caminho seguido pelas ondas ao se propagarem pode, a princípio, explicar a estrutura do diagrama de borboleta, com a atividade magnética surgindo ao redor de 35° de latitude e migrando em direção ao equador.

Quando a onda não dipolar está em seu máximo também estará a atividade solar, e esta irá diminuir a medida que a energia é transferida para o dipolo, que crescerá em amplitude.

Apesar de estar longe de representar corretamente o processo de dínamo por não explicar o crescimento dos campos magnéticos (já que por ser um modelo bi-dimensional ele não pode representar de forma adequada a estrutura helicoidal do escoamento), nós acreditamos que este modelo quase-geostrófico MHD pode clarificar a interpretação de diversos aspectos da atividade magnética solar, incluindo a sua evolução espaço temporal, e sua ciclicidade.

Estudos numéricos tanto lineares quanto não lineares de ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas num escoamento básico realista poderá proporcionar uma melhor idéia a respeito da evolução espaço temporal das ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas e sua possível relação com a atividade solar.

Generalizações do modelo para coordenadas esféricas e inclusão de um fluxo zonal variando no tempo (interação onda escoamento médio), terão um papel importante neste sentido, de modo análogo ao que foi feito para ondas de Rossby-Haurwitz na atmosfera terrestre (Burzlaff et al, 2009).

Capítulo 3

Um modelo teórico para as reversões do campo geomagnético

O dipolo axial é a componente energeticamente dominante do campo magnético Terrestre, permanecendo assim a maior parte do tempo. Contudo, durante o processo de reversões esta energia diminui e eventualmente se torna nula e em seguida volta a crescer, crescendo contudo na polaridade oposta à inicial.

Pelo fato de, durante uma reversão, o dipolo diminuir em amplitude e logo em seguida crescer na polaridade oposta, a dissipação por si só não pode explicar este fenômeno. A única possibilidade para explicar a existência das reversões geomagnéticas é a transferência de energia entre o dipolo axial e alguma outra componente do campo, e para que isto seja possível deve-se levar em conta a não linearidade.

Apresentaremos neste capítulo um modelo conceitual para explicar o fenômeno das reversões baseado na interação não linear entre ondas que surgem como modos normais das equações de Hide (1966) para o dínamo terrestre: as ondas de Rossby MHD.

Modelos semelhantes para a variação do dipolo foram propostos por (Gissiger ET AL, 2010), (Gissiger ET AL, 2012), estes modelos são baseados em argumentos de simetria da equação da indução magnética. Nosso modelo por outro lado é magnetohidrodinâmica, pois é deduzido considerando as equações de momento e de indução magnética de forma acoplada.

Modelo de Hide (1966)

O modelo de Hide (1966) foi desenvolvido para representar ondas afetadas tanto pela força de Coriolis quanto pela força magnética que são relevantes para a dinâmica no núcleo da Terra e para as variações do campo geomagnético. É um modelo em coordenadas cartesianas análogo ao modelo do plano beta de Rossby (1939). No entanto, ao contrário da atmosfera e do oceano terrestre o núcleo externo da Terra não pode ser aproximado por uma camada fina (equações da água rasa), já que sua espessura é comparável com o raio da Terra naquela região. Contudo, devido ao forte efeito da força de Coriolis os movimentos nesta região continuam sendo basicamente bi-dimensionais (Teorema de Taylor-Proudman).

No modelo de Hide, a variação da força de Coriolis com a latitude não é devido à variação da componente da força normal à superfície da esfera e sim devido à variação da espessura da coluna de fluido com a latitude como ilustrado na figura abaixo.

Neste sentido, as ondas de Rossby numa camada espessa se assemelham às ondas de Rossby topográficas no caso de uma camada fina. O coeficiente de variação da força de Coriolis com a latitude no modelo do plano beta de Hide é dado por

$$\beta = -\frac{2\Omega \cos\phi}{R}$$

onde R é o raio do núcleo externo.

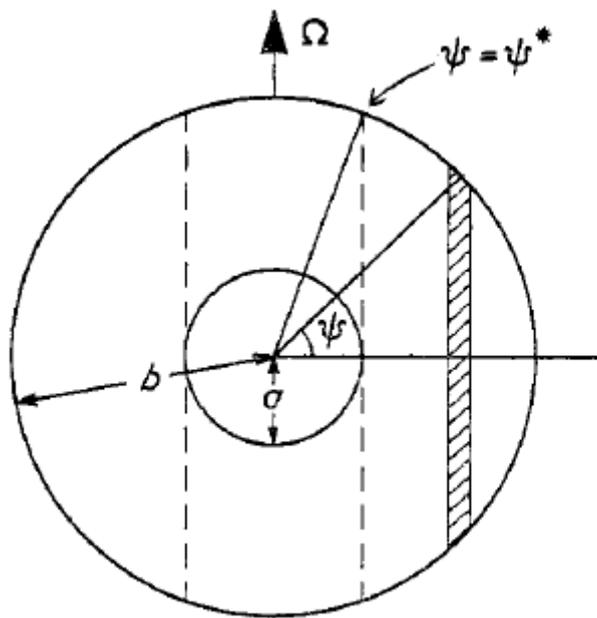


Figura : Coluna de fluido numa camada espessa Hide(1966). A rotação induz uma independência da dinâmica com relação à coordenada z.

A equações de Hide 1966 são

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + f\vec{u}^\perp = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0\rho} \vec{b} \cdot \nabla \vec{b} \tag{3.1a}$$

$$\frac{D\vec{b}}{Dt} = \vec{b} \cdot \nabla \vec{u} \tag{3.1b}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (3.1c)$$

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0 \quad (3.1d)$$

Onde estamos considerando os campos bidimensionais $\vec{u} = (u, v)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y)$.

Podemos incluir uma forçante térmica devido ao empuxo na equação (1a) que se torna

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + f\vec{u}^\perp = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0\rho} \vec{b} \cdot \nabla \vec{b} + kT\vec{y} \quad (3.2)$$

Tomando o rotacional de (3.1a) e (3.1b), temos:

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi + f)}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2\psi + f) = \frac{1}{\mu_0\rho} J(A, \nabla^2 A) + \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 A}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 A) = 0 \quad (3.3b)$$

onde o potencial vetor A e a função corrente ψ satisfazem às relações $\nabla^2 A = j$ e $\nabla^2 \psi = \xi$, respectivamente, sendo j densidade de corrente magnética e ξ a vorticidade relativa.

Nas equações (3.3), $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ para quaisquer funções f e g .

Notamos então que gradientes de temperatura na direção x serão uma forçante do movimento.

Consideraremos nas equações acima perturbações ao redor de um estado básico caracterizado por um escoamento zonal cisalhante e um campo magnético toroidal variando com a latitude. Dessa forma, os campos de velocidade \vec{U}_T e magnético \vec{B}_T são respectivamente escritos na forma:

$$\vec{U}_T(x, y, t) = U(y)\vec{i} + \vec{u}(x, y, t)$$

e

$$\vec{B}_T(x, y, t) = B(y)\vec{i} + \vec{b}(x, y, t)$$

Com isto podemos escrever as equações da dinâmica em termos das perturbações da função de corrente ψ e do potencial vetor A de acordo com o seguinte sistema:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -U(y) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + (\beta - U''(y)) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\mu_0 \rho} B(y) \frac{\partial \nabla^2 A}{\partial x} + B''(y) \frac{\partial A}{\partial x} + \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 A}{\partial t} = & -U(y) \frac{\partial \nabla^2 A}{\partial x} + B''(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + B(y) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - U''(y) \frac{\partial A}{\partial x} + 2B'(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ & - 2U'(y) \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + \eta \nabla^2 (\nabla^2 A) \end{aligned} \quad (3.4b)$$

3.1. Relação de dispersão e determinação das ressonâncias Não Lineares

As equações sem forçante e dissipação e linearizadas em torno de um estado básico uniforme (i.e., $U(y) \equiv 0$ e $B(y) = B_0 = \text{const}$) podem ser escritas como

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{B_0}{\mu_0 \rho} \frac{\partial \nabla^2 A}{\partial x} \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 A}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \quad (3.5b)$$

As equações (3.5) podem ser escritas em notação de operadores como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nabla^2 \psi \\ \nabla^2 A \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} \quad (3.6),$$

sendo o operador linear \mathcal{L} dado por:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \beta \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\mu_0 \rho} B_0 \frac{\partial \nabla^2}{\partial x} \\ B_0 \frac{\partial \nabla^2}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Resolvendo-se a equação característica para o símbolo de \mathcal{L} encontramos as autofrequências do sistema, ou seja, as relações de dispersão das ondas de Rossby MHD do modelo de Hide (1966). A equação característica é dada por

$$\det \left(-i\omega - \frac{1}{|\vec{k}|^2} \mathcal{L}^*(i\vec{k}) \right) = 0 \quad (3.8)$$

Onde o símbolo do operador linear é dado por

$$\mathcal{L}^* = i \begin{bmatrix} \beta k & \frac{1}{\mu_0 \rho} B_0 k |k|^2 \\ B_0 k |k|^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Novamente temos as relações de dispersão

$$\omega_- = \frac{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4v_A^2 |\vec{k}|^4}\right) k}{2|\vec{k}|^2} \quad (3.10)$$

e

$$\omega_+ = \frac{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4v_A^2 |\vec{k}|^4}\right) k}{2|\vec{k}|^2} \quad (3.11)$$

Utilizamos nas relações de dispersão o valor de $\phi = 45^\circ$ de forma que com os valores de $\Omega = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ e o raio do núcleo externo terrestre $R = 2,89 \cdot 10^6 \text{ m}$, temos

$$\beta = -\frac{2\Omega \cos\phi}{R} = 3,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

Ainda temos os parâmetros do campo magnético $\mu_0 = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ e $\rho = 1,1 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$.

A intensidade do campo geomagnético dentro do núcleo é em grande parte desconhecida, contudo fazendo inversão das oscilações torcionais no núcleo externo terrestre Gillet ET AL (2010) obtiveram uma estimativa de 2mT para o campo magnético radial nesta região. Este será o valor aqui utilizado para o campo magnético básico B_0 .

Oscilações torcionais são ondas de Alfvén para as quais o movimento do fluido é paralelo à força de Coriolis de forma que esta não influencia sua dinâmica, não dependendo também da direção torcional do campo geomagnético. Por esta razão, apesar de haver a possibilidade de o campo magnético toroidal ser mais intenso que o poloidal, utilizaremos a estimativa para o campo poloidal.

Dessa forma, a velocidade das ondas de Alfvén é dada por

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \approx 1,7 \cdot 10^{-2} m/s$$

Apresentamos nas Figuras 3.1 e 3.2, respectivamente, os gráficos da relação de dispersão para os ramos magnético e hidrodinâmico das ondas de Rossby MHD no contexto do núcleo externo da Terra, contudo devido à diferença nas escalas temporais destas ondas apresentaremos em gráficos separados.

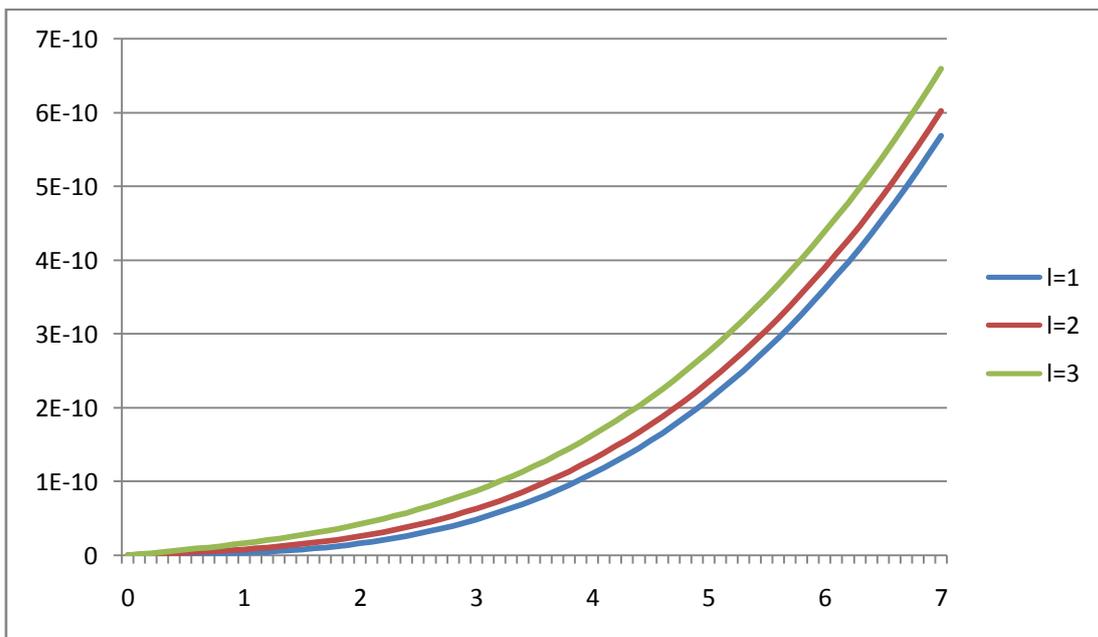


Fig 3.1: relação de dispersão de ondas de Rossby, modo magnético, para l=1, l=2, l=3 e l=4.

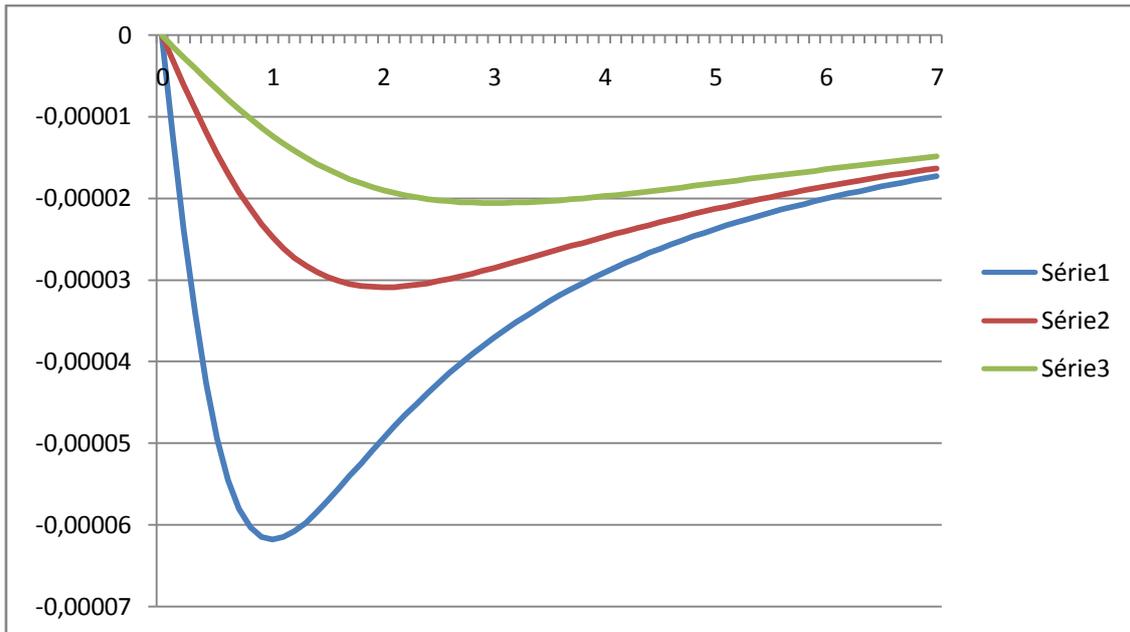


Fig 3.2: relação de dispersão de ondas de Rossby, modo hidrodinâmico, para $l=1$, $l=2$, $l=3$ e $l=4$.

Tripletos ressonantes:

Como vimos o conjunto de número de ondas ressonantes para uma dada relação de dispersão $\omega(k)$ satisfaz as relações

$$k_1 = k_2 + k_3$$

$$l_1 = l_2 + l_3$$

e

$$\omega(k_1) = \omega(k_2) + \omega(k_3)$$

Utilizaremos do método gráfico usado no capítulo anterior para determinar as ressonâncias não lineares triádicas. Primeiro, devido à escala de tempo dos processos, tipicamente processos envolvendo o campo magnético evoluindo numa escala temporal mais rápida que os processos hidrodinâmicos. Logo, escolheremos a primeira onda como uma onda magnética de comprimento de onda longo para representar o dipolo do campo geomagnético, e então acoplaremos esta onda com uma onda hidrodinâmica e outra magnética mais curta.

Neste contexto, o método gráfico funciona da seguinte forma. Transladamos a curva de dispersão da onda rápida até um ponto da relação de dispersão da onda lenta, esse procedimento nos fornece as duas primeiras ondas que constituem o tripleto.

Seguindo a curva da onda lenta o ponto onde as duas relações de dispersão se cruzam determina o terceiro elemento do tripleto.

Caso 1) dois modos hidrodinâmicos e um modo magnético.

O fato de as ondas de Rossby “hidrodinâmicas” evoluírem numa escala temporal muito mais rápida que as ondas de Rossby magnéticas, faz com que neste tipo de interação as ondas de Rossby magnéticas seja basicamente um catalisador para a interação entre as ondas “hidrodinâmicas”, já que o coeficiente de interação associado à onda hidrodinâmica será muito próximo de zero (é varias ordens de grandeza menor que os outros coeficientes), tão próximo que justifica aproxima-lo por zero.

Com efeito, considerando uma equação genérica dos tripletos, onde o modo 1 é associado ao modo lento, os modos 2 e 3 são associados ao modo rápido, por simplicidade consideremos amplitudes reais:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} &= C_1\Omega_2\Omega_3 \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= C_2\Omega_1\Omega_3 \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= C_3\Omega_1\Omega_2\end{aligned}\tag{3.12}$$

Neste caso teremos $C_1 = 0$ o que implica $\Omega_1 = \text{cste}$, chamando $\Omega_2 = A$ e $\Omega_3 = B$:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= cB \\ \frac{dB}{dt} &= -cA\end{aligned}\tag{3.13}$$

Onde

$$c = C_3 \Omega_1 = C_2 \Omega_1$$

Esta equação pode ser escrita na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

A matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Tem autovalores imaginários puros

$$\lambda_{\pm} = \pm ic \quad (3.16)$$

Dada uma condição inicial

$$\begin{pmatrix} A(0) \\ B(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

A solução da equação é dada por

$$\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(0)e^{ict} \\ B(0)e^{-ict} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Exemplo:

Tripleto formado por dois modos hidrodinâmicos acoplados por um magnético com número de onda e frequência dados na tabela:

ressonancias	h	h	m
k	1	2	3
l	4	3	7
omega	-2,84537E-05	-2,77753E-05	0

Tabela1: tripleto ressonante formado por dois modos hidrodinâmicos e um magnético.

A solução para este tripleto é ilustrada abaixo

Caso 1) dois modos hidrodinâmicos e um modo magnético.

O fato de as ondas de Rossby “hidrodinâmicas” evoluírem numa escala temporal muito mais rápida que as ondas de Rossby magnéticas faz com que neste tipo de interação a onda de Rossby magnética seja basicamente um catalisador para a interação entre as duas ondas “hidrodinâmicas”, já que o coeficiente de interação associado à onda hidrodinâmica será muito próximo de zero (é varias ordens de grandeza menor que os outros coeficientes), tão próximo que justifica aproxima-lo por zero.

Com efeito, considerando uma equação genérica dos tripletos, onde o modo 1 é associado ao modo lento, os modos 2 e 3 são associados ao modo rápido, por simplicidade consideremos amplitudes Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 reais:

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_1\Omega_2\Omega_3$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_2\Omega_1\Omega_3$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = C_3\Omega_1\Omega_2$$

(3.18)

Em (3.18), C_1 , C_2 e C_3 representam os coeficientes de interação do tripleto ressonante. Neste caso teremos $C_1 = 0$ o que implica $\Omega_1 = \text{cote}$, e chamando $\Omega_2 = A$ e $\Omega_3 = B$, segue que:

$$\frac{dA}{dt} = cB$$

$$\frac{dB}{dt} = -cA$$

(3.19)

onde

$$c = C_3\Omega_1 = C_2\Omega_1$$

A condição acima resulta do vínculo imposto pela conservação da energia do tripleto ressonante ($C_1 + C_2 + C_3 = 0$) e da condição $C_1 = 0$. A equação (3.19) pode ser escrita na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

(3.20)

A matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$

(3.21)

tem autovalores imaginários puros

$$\lambda_{\pm} = \pm ic$$

(3.22)

Dada uma condição inicial

$$\begin{pmatrix} A(0) \\ B(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

(3.23)

A solução da equação (3.20) é dada por

$$\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(0)e^{ict} \\ B(0)e^{-ict} \end{pmatrix}$$

(3.24)

Exemplo:

Tripleto formado por dois modos hidrodinâmicos acoplados por um magnético com numero de onda e frequência dados na Tabela 3.1:

ressonancias	h	h	m
k	1	2	3
l	4	3	7
omega	-2,84537E-05	-2,77753E-05	0

Tabela 3.1: tripleto ressonante formado por dois modos hidrodinâmicos e um magnético.

A solução para este tripleto é ilustrada na figura abaixo.

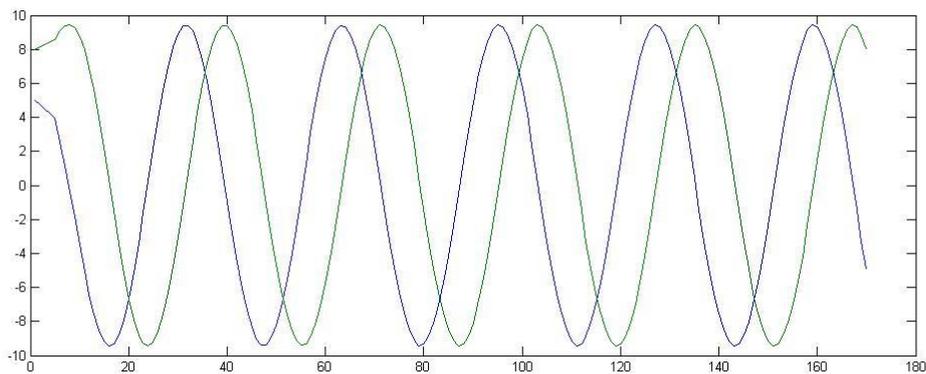


Figura 3.3: solução para o tripleto dado pela tabela 3.1 (unidades de tempo adimensional)

Caso 2: três modos hidrodinâmicos, com forçante e dissipação:

Outro tipo de interação de interesse é o caso em que três modos hidrodinâmicos interagem. Um exemplo é apresentado abaixo.

Tabela 3.2: Tripleto ressonante formado por três modos hidrodinâmicos.

ressonancias	h	H	h
k	1	3	4
l	1	1	2
omega	-6,18E-05	-3,708E-05	-9,9E-05

A seguir utilizaremos o mesmo tripleto apresentado na Tabela 3.2, contudo agora iremos introduzir forçante e dissipação de forma a tornar o sistema caótico.

O sistema de três ondas ressonantes com coeficientes de interação normalizados é dado por

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} &= C_1\Omega_2\Omega_3 + \mu\Omega_1 \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= C_2\Omega_1\Omega_3 - \gamma\Omega_2 \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= -\Omega_3 + F + C_3\Omega_1\Omega_2\end{aligned}\tag{3.25}$$

Com $\mu = 1.2$, $\gamma = 0.1$, $F = 1$. Fisicamente F representa forçantes térmicas, γ representa um coeficiente de dissipação (vide apêndice), μ está associado à instabilidades (que levam à crescimentos exponenciais, vide apêndice). Os valores dos coeficientes foram escolhidos de forma a obtermos transições caóticas de polaridade.

A solução do sistema, para a componente Ω_2 , que corresponde a uma onda dipolar, é apresentada abaixo.

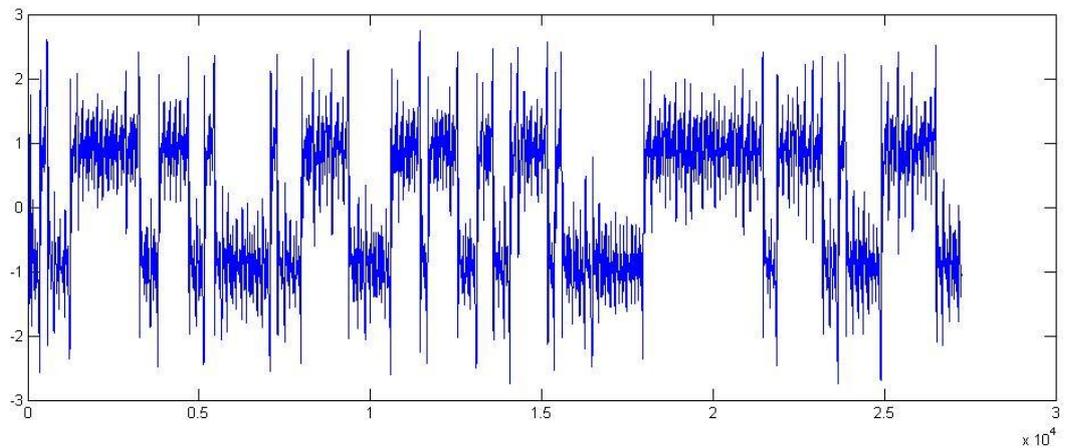


Fig. 3.4: solução para uma das componentes de um tripleto forçado e dissipativo num regime caótico. A amplitude corresponde a uma onda de Rossby hidrodinâmica de comprimento dipolar, seguindo parâmetros da Tabela 3.2.

O histograma de valores de Ω_1 neste caso é apresentado na Fig. 3.5, onde notamos a existência de dois valores preferenciais simétricos no sistema.

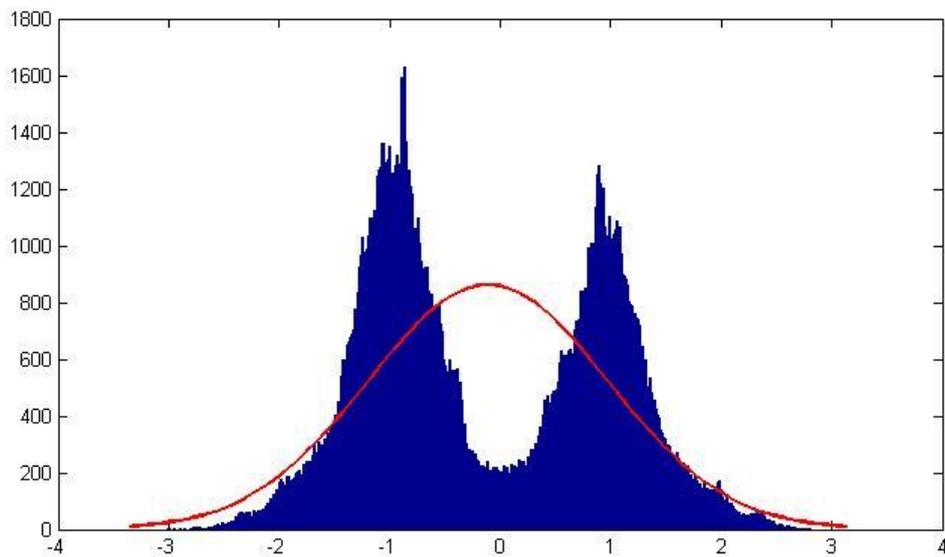


Fig. 3.5: histograma de valores para amplitude de uma onda de Rossby hidrodinâmica de comprimento dipolar, seguindo parâmetros da Tabela 3.2. A curva em vermelho corresponde ao melhor ajuste gaussiano para o histograma.

Atratores do modelo com forçante e dissipação

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} &= C_1\Omega_2\Omega_3 + \mu\Omega_1 \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= C_2\Omega_1\Omega_3 - \gamma\Omega_2 \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= -\alpha\Omega_3 + F + C_3\Omega_1\Omega_2\end{aligned}\tag{3.25}$$

Um ponto de equilíbrio da equação é um conjunto de reais ou complexos (dependendo de as amplitudes serem reais ou complexas), tais que

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\forall t$ real. De forma que

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} = 0$$

Logo para achar os pontos de equilíbrio da equação devemos resolver

$$\begin{aligned}0 &= C_1\Omega_2\Omega_3 + \mu\Omega_1 \\ 0 &= C_2\Omega_1\Omega_3 - \gamma\Omega_2 \\ 0 &= -\alpha\Omega_3 + F + C_3\Omega_1\Omega_2\end{aligned}\tag{3.26}$$

De onde vemos que um ponto de equilíbrio trivial é

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F/\alpha \end{pmatrix}$$

Já que estamos considerando que o operador não linear conserva energia vale que

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \tag{3.27}$$

Podemos então multiplicar a equação para Ω_1 por Ω_1 e o mesmo com as outras duas componentes, somando as três equações temos

$$\mu\Omega_1 - \gamma\Omega_2 - (\alpha\Omega_3 + F)\Omega_3 = 0 \tag{3.28}$$

De onde tiramos outros pontos de equilíbrio

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\gamma} \\ \pm\sqrt{\mu} \\ F/\alpha \end{pmatrix}$$

E

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\gamma} \\ \pm\sqrt{\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Façamos a linearização ao redor dos pontos de equilíbrio para verificar sua estabilidade. Lembrando que se X tem sua evolução dada pela equação diferencial ordinária

$$\frac{dX}{dt} = M(X)$$

Sua linearização é dada por

$$\frac{dX}{dt} = DM(X_0)X$$

Onde X_0 é o ponto de equilíbrio, $M(X)$ um campo vetorial não linear e $DM(X_0)$ sua derivada calculada em X_0

No caso da primeiro ponto de equilíbrio a linearização fornece do sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & C_1 F/\alpha & 0 \\ C_2 F/\alpha & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

A matriz tem autovalores $DM(X_0)$ neste caso tem autovalores

$$\lambda_1 = -\alpha$$

e

$$\lambda_{2,3} = \frac{\mu - \gamma \pm \sqrt{(\mu - \gamma)^2 - 4C_1 C_2 (F/\alpha)^2}}{2} \quad (3.31)$$

Considerando $\alpha > 0$ concluímos que o primeiro autovalor fornece uma direção para o sistema. A estabilidade das direções associadas aos demais autovalores vai depender do sinal do número dentro da raiz, podendo fornecer direções estáveis ou instáveis.

No segundo caso a linearização fornece

$$DM \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\gamma} \\ \pm\sqrt{\mu} \\ F/\alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & C_1 F/\alpha & \pm\sqrt{\gamma} C_1 \\ C_2 F/\alpha & -\gamma & \pm\sqrt{\gamma} C_2 \\ \pm\sqrt{\mu} C_3 & \pm\sqrt{\gamma} C_3 & -\alpha \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Cujos autovalores são soluções da equação característica correspondente, dada por

$$\det \begin{bmatrix} \mu - \lambda & C_1 F/\alpha & \pm\sqrt{\gamma}C_1 \\ C_2 F/\alpha & -\gamma - \lambda & \pm\sqrt{\gamma}C_2 \\ \pm\sqrt{\mu}C_3 & \pm\sqrt{\gamma}C_3 & -\alpha - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

Ainda,

$$DM \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\gamma} \\ \pm\sqrt{\mu} \\ F/\alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & \pm\sqrt{\gamma}C_1 \\ 0 & -\gamma & \pm\sqrt{\gamma}C_2 \\ \pm\sqrt{\mu}C_3 & \pm\sqrt{\gamma}C_3 & -\alpha \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Cujos autovalores são soluções da equação característica

$$\det \begin{bmatrix} \mu - \lambda & 0 & \pm\sqrt{\gamma}C_1 \\ 0 & -\gamma - \lambda & \pm\sqrt{\gamma}C_2 \\ \pm\sqrt{\mu}C_3 & \pm\sqrt{\gamma}C_3 & -\alpha - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

Sensibilidade com relação ao parâmetro F

O modelo apresentado acima para as reversões do dipolo geomagnético apresenta uma forte dependência com relação aos parâmetros. De particular interesse físico é a dependência do comportamento do sistema com relação ao parâmetro F, que representa a projeção da forçante térmica no modo 3. Logo, este parâmetro representa o efeito de forçantes térmicas, como, por exemplo, aquelas relacionadas a anomalias térmicas na interface manto-núcleo externo. Como os processos convectivos no manto terrestre se dão numa escala de tempo muito mais lenta que os processos dinâmicos do núcleo externo, a forçante térmica é suposta constante no tempo.

Como antes a evolução do sistema será dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} &= C_1\Omega_2\Omega_3 + \mu\Omega_1 \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= C_2\Omega_1\Omega_3 - \gamma\Omega_2 \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= -\alpha\Omega_3 + F + C_3\Omega_1\Omega_2 \end{aligned}$$

Onde fixamos $\mu = 0,0714$, $\gamma = 0,06$ e $\alpha = 0,06$.

Inicialmente começamos com parâmetros de forma que não ocorrem transições entre os dois valores de equilíbrio do dipolo ao redor de +1 e de -1, ou seja, usando condições iniciais para as amplitudes (-1, -1, 0). $F = 0,48$ Neste caso, o sistema flutua ao redor do valor de -1 para o dipolo. Por outro lado, se a condição inicial é (1, 1, 0) o dipolo flutua ao redor do valor 1, e as séries temporais para a evolução do sistema com ambas condições iniciais são apresentadas nas figuras abaixo. Transições entre as duas bacias de atração não são observadas mesmo em integrações longas.

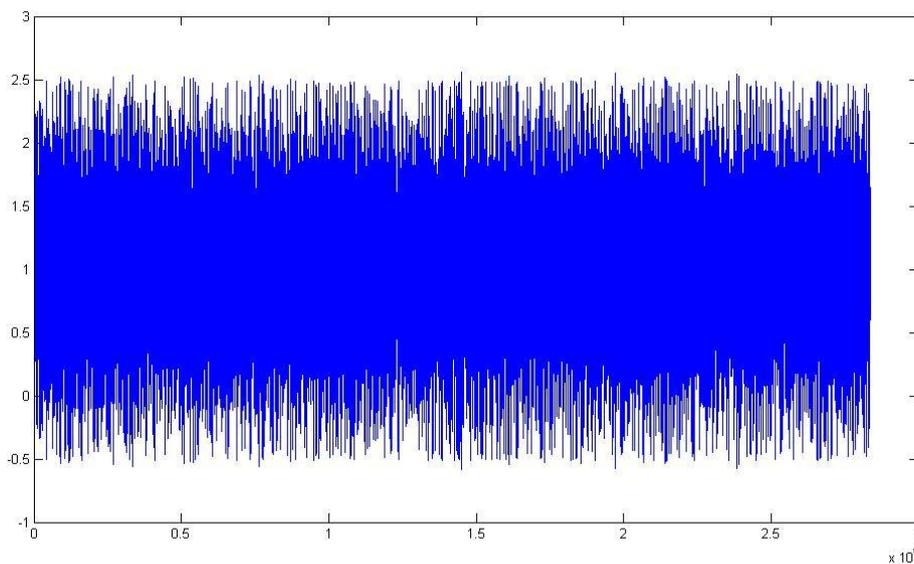


Fig. 3.6: Série temporal referente à evolução da componente dipolar para condições iniciais (1,1,0) e o parâmetro $F=0,48$.

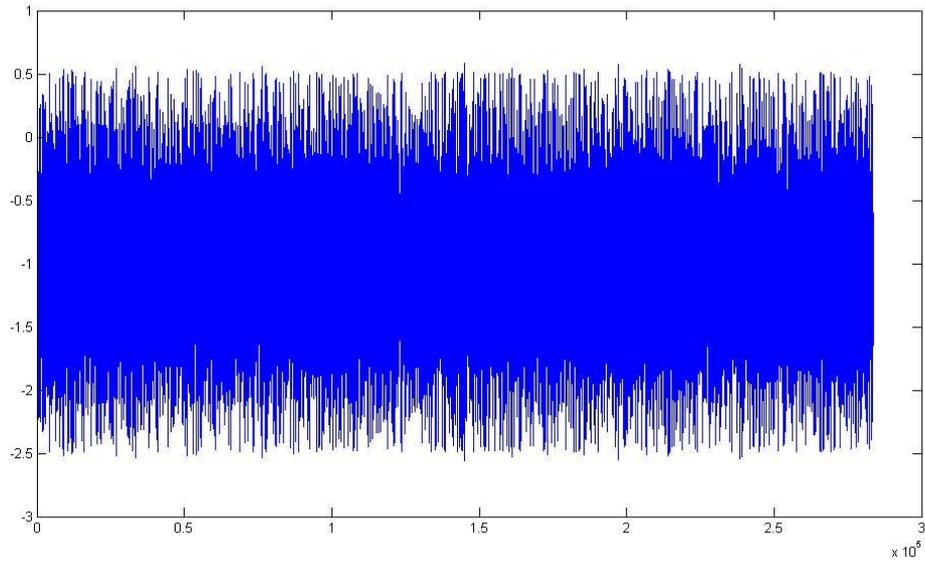


Fig. 3.7: Série temporal referente à evolução da componente dipolar para a condição inicial dada por $(-1,-1,0)$ e o parâmetro $F=0,48$.

Podemos ainda observar as respectivas trajetórias do sistema no espaço de fase, conforme ilustrado nas Figuras 3.8 e 3.9.

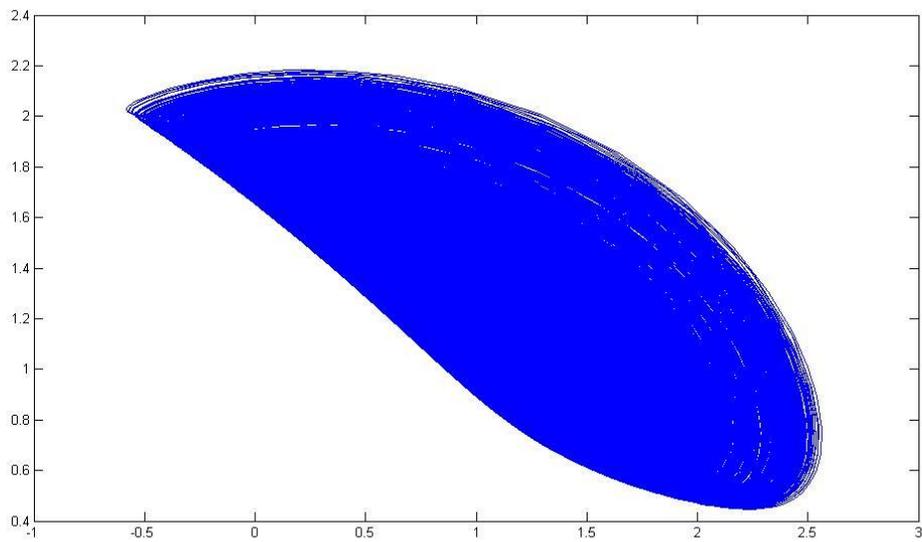


Fig. 3.8: Trajetória do sistema no plano (x,y) para condição inicial $(1,1,0)$. $F=0,48$.

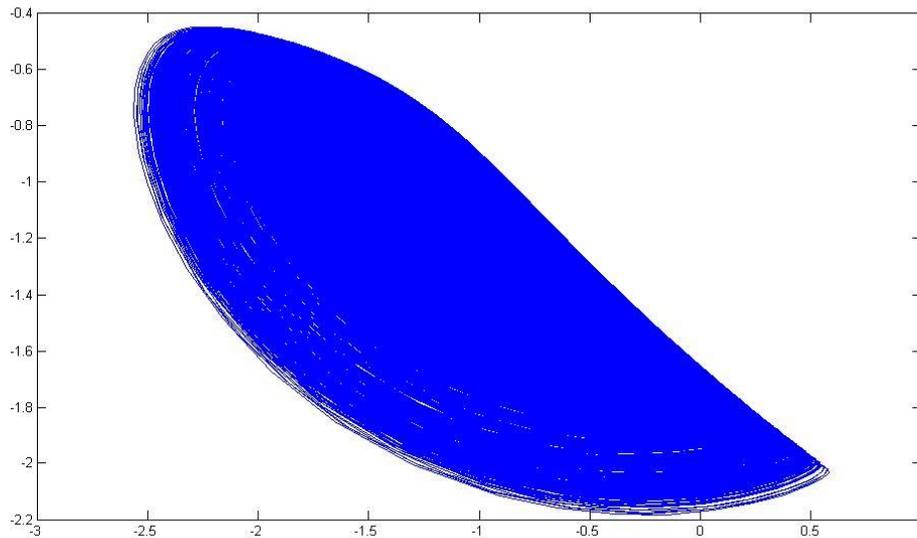


Fig. 3.9: Trajetória do sistema no plano (x,y) para condição inicial $(1,1,0)$ e o parâmetro $F=0,48$.

Aumentando o valor de F para observamos a existência de uma transição entre as bacias de atração dos valores de equilíbrio durante uma integração longa, obtemos a série temporal para a componente dipolar e a respectiva trajetória no espaço de fase conforme ilustrada nas Figuras 3.10 e 3.11, respectivamente.

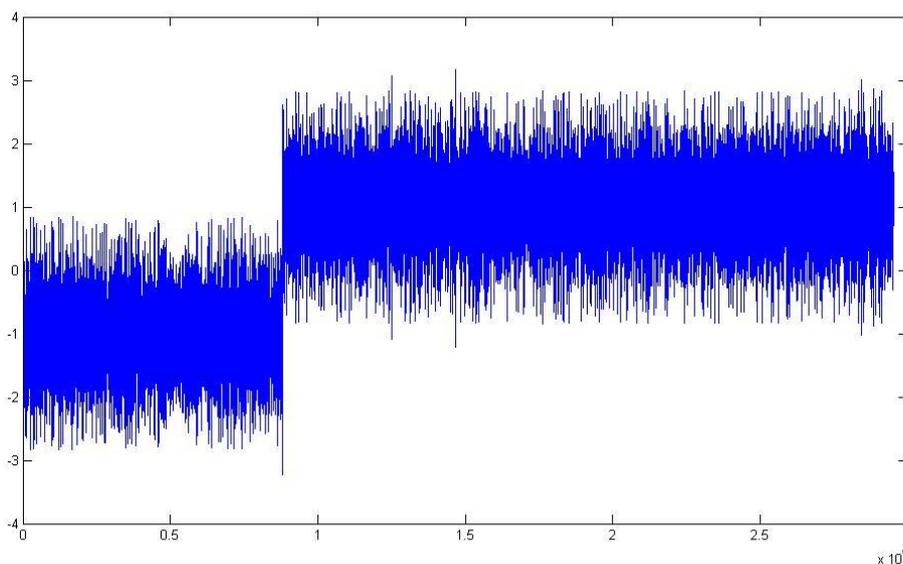


Fig. 3.10: série temporal referente à evolução da componente dipolar para a condição inicial dada por $(-1,-1,0)$ e o parâmetro $F=0,516$. Apenas uma reversão é observada no período de integração.

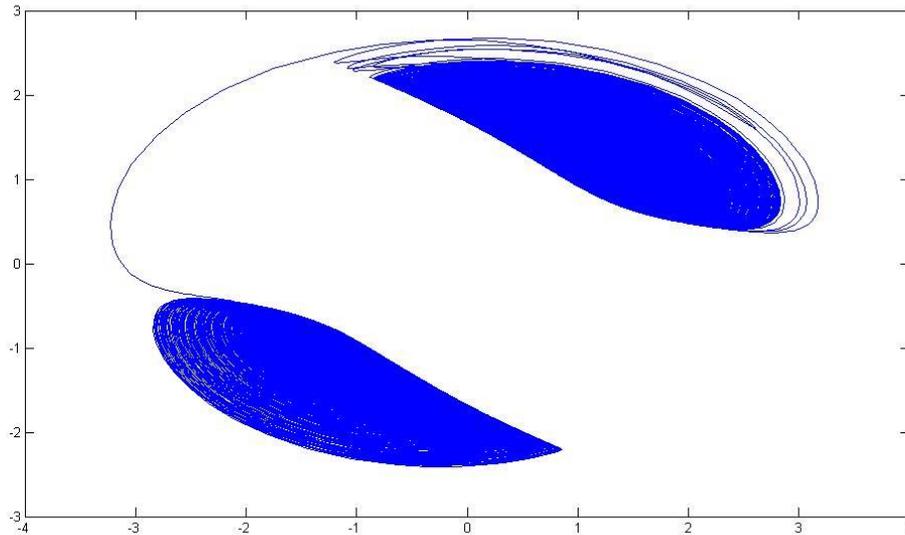


Fig. 3.11: Trajetória do sistema no plano (x,y) para condição inicial $(-1,-1,0)$. Observa-se apenas uma transição entre as bacias de atração dos valores de equilíbrio. $F=0,516$.

Aumentando o valor de F para 0,58 a taxa de transições torna-se bastante alta, com algumas dezenas de reversões para a componente dipolar num período de integração semelhante às integrações anteriores. Observe que os valores de maior intensidade da componente dipolar são aqueles que precedem e procedem um evento de reversão. O significado deste fenômeno será discutido a seguir. As transições são caóticas, onde os períodos de polaridade estável tem duração irregular. Nas Figuras 3.12 e 3.13 são apresentadas a série temporal para as reversões da componente dipolar e a trajetória do sistema no espaço de fase, respectivamente .

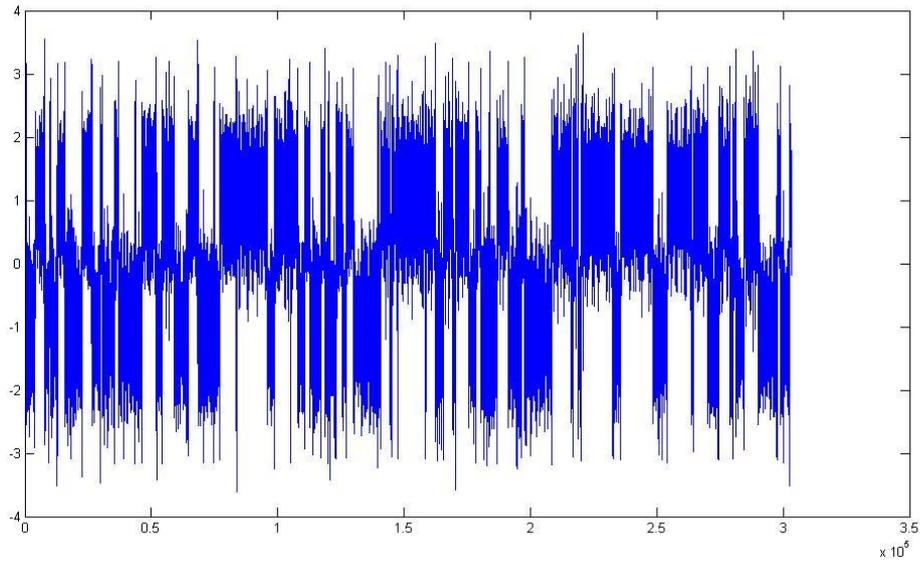


Fig. 3.12: série temporal para a evolução da componente dipolar para condição inicial dada por iniciais $(-1,-1,0)$ e o parâmetro $F= 0,58$. Apenas uma reversão é observada no período de integração.

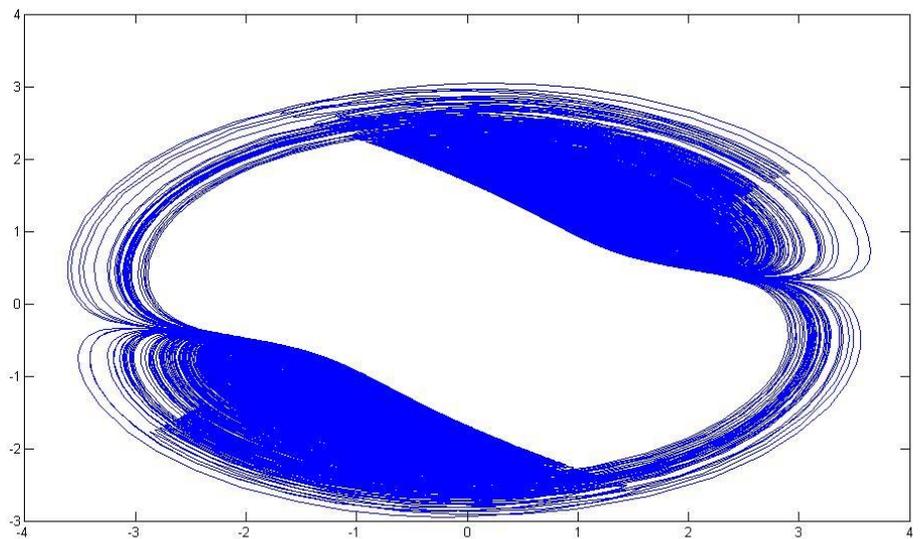


Fig. 3.13: Trajetória do sistema no plano (x,y) para condição inicial $(-1,-1,0)$. Observa-se apenas uma transição entre as bacias de atração dos valores de equilíbrio. $F= 0,58$.

Morfologia das Reversões:

Baseados em uma compilação de dados paleomagnéticos transacionais (Valet ET AL, 2012) sugeriram que as reversões geomagnéticas ocorrem em uma seqüência de três eventos. Antes de uma reversão é observado um aumento significativo da intensidade do dipolo, e em seguida o dipolo passa a cair de intensidade e reverte rapidamente de polaridade. Após a reversão o dipolo cresce em polaridade até atingir alta intensidade, quando então volta a cair a valores baixos, caracterizando uma excursão do campo que foi chamada de “rebound”.

Esta seqüência de eventos pode ser observada em nosso modelo teórico. De fato, observando seqüência de reversões geradas pelo modelo notamos que as intensidades mais altas atingidas pela componente dipolar são justamente aquelas que antecedem uma reversão e aquelas observadas logo em seguida à reversão.

Abaixo apresentamos duas séries temporais obtidas para a evolução do dipolo, onde em ambas são observadas as características descritas acima.

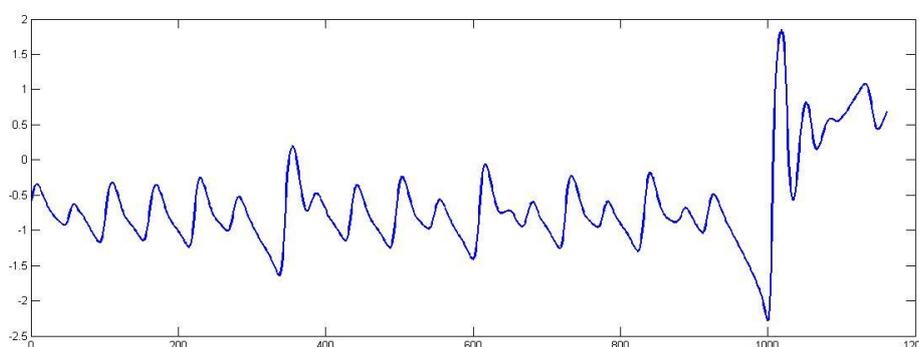


Fig 3.14. Série temporal para a evolução da componente dipolar apresentando uma transição de polaridade. Valores mais altos de intensidade da componente dipolar são aqueles que antecedem e procedem a reversão. Zoom de uma reversão apresentada na figura 3.13.

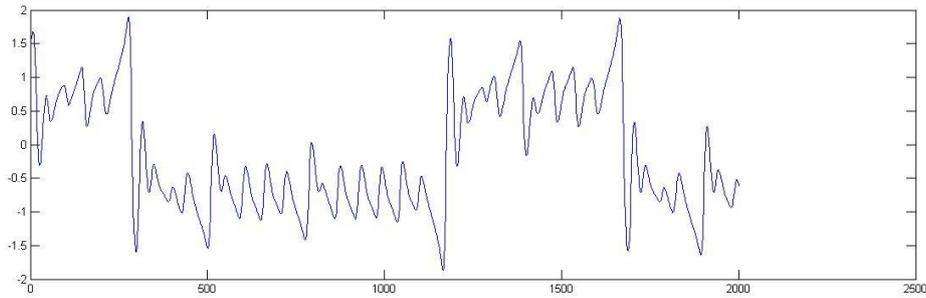


figura 3.15: Série temporal para a evolução da componente dipolar apresentando três transição de polaridade. Novamente notamos que valores mais altos de intensidade da componente dipolar são aqueles que antecedem e procedem a reversão. Zoom de uma sequência apresentada na figura 3.13.

Daremos então uma interpretação física para este fenômeno. Os dois valores de equilíbrio para o dipolo são separados por uma barreira, e a transição entre as bacias de atração dos valores de equilíbrio se dá por transições infreqüentes. Para que uma transição ocorra o dipolo tem que “ganhar” energia suficiente das demais componentes para que seja possível transpor a barreira que separa os valores de equilíbrio. Podemos então fazer uma analogia com uma partícula num potencial com dois “vales”, para que a partícula seja capaz de transpor a barreira entre os pontos de equilíbrio ela deve ganhar energia suficiente, e imediatamente antes e após a partícula transpor a barreira deverão ser observadas grandes oscilações nesta componente. Apesar de o campo de vetores nas equações apresentadas não serem campos potenciais acreditamos que a analogia seja útil para interpretar este fenômeno. A interpretação da partícula num poço potencial foi usada por (Ossendrijver ET AL,2001), num modelo estocástico para reversões.

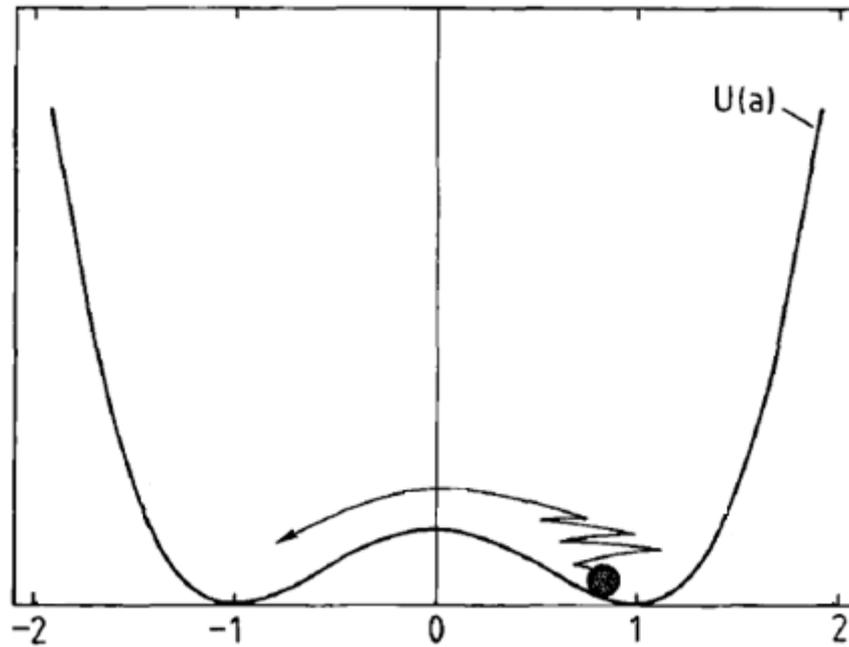


Figura 3.16: analogia entre o processo de reversões e as transições de uma partícula em um potencial bi-estável (Ossendrijver ET AL,2001).

Discussão

Apresentamos neste capítulo um modelo teórico de baixa ordem para o processo de reversões do dipolo geomagnético. Apesar de ser resultante da evolução de um sistema de ordem infinita as variações do dipolo geomagnético apresentam uma dinâmica de baixa dimensão, como concluíram (Ryan, ET AL 2008) analisando uma série temporal de 2 milhões de anos para o momento virtual de dipolo axial (VADM) (Valet, 2005).

Reversões obtidas no modelo apresentam similaridades com reversões observadas (Valet ET AL, 2012), no qual uma reversão é precedida de uma alta intensidade (quando comparada com a média histórica), seguida por uma queda rápida de intensidade e subsequente reversão de polaridade. (Valet ET AL, 2012) sugerem uma escala de pouco mais de mil anos para o processo de reversão, e seguindo a reversão o dipolo cresce a valores altos de intensidade e cai novamente até próximo do valor nulo.

O modelo aqui apresentado demonstra uma forte dependência nos parâmetros, em particular a variação na frequência de reversões depende fortemente do parâmetro que pode ser interpretado como uma força térmica. Devido a sucessivas bifurcações a frequência de reversões pode aumentar ou diminuir com o parâmetro F , podendo inclusive parar de reverter.

Uma variação na forçante térmica do sistema pode ser consequência de variações nos gradientes térmicos na escala de dezenas de milhões de anos devido, por exemplo, ao crescimento do núcleo interno, e à aparições de inomogeneidades na interface manto núcleo devido ao processo tectônico.

Capítulo 4

Modelos teóricos com separação de escalas: clusters de tripletos ressonantes, modulações no ciclo solar e os superchrons.

Modelos para variações na frequência de reversões

O fenômeno das reversões do campo geomagnético não apresenta claramente alguma periodicidade, tendo sido observados períodos que variam em três ordens de grandeza, de dezenas de milhares de anos à dezenas de milhões de anos. Em particular é importante evidenciar a existência de dois longos períodos sem a ocorrência de reversões, são os chamados superchrons.

Não se sabe se superchrons ocorrem essencialmente devido à não linearidade e caoticidade do sistema (espectro caracterizado por infinitas frequências) ou devido à efeitos transientes que provocam variações de escala de tempo muito longa e podem eventualmente favorecer ou desfavorecer a ocorrência de reversões (ver Hulot ET AL, 2003). Efeitos que podem a principio alterar a frequência de reversões são mudanças térmicas e ou topográficas na interface manto núcleo, variações na frequência de rotação terrestre, crescimento do núcleo interno, dentre outros fenômenos. Existem argumentos a favor de ambos casos.

No capítulo anterior vimos que a interação não linear entre ondas pode provocar variações nas amplitudes das ondas de Rossby, podendo servir como explicação para o fenômeno das reversões geomagnéticas. Interações não lineares ocorrem entre conjuntos de três ondas chamados tripletos, caso desprezemos possíveis efeitos de instabilidade e de dissipação a solução para os tripletos é periódica e pode ser expressa em termos das funções elípticas de Jacobi.

Em suma, modelos com um tripleto podem ser usados com sucesso para explicar o processo de reversões. Contudo, dificilmente explicaria a existência de fenômenos como os superchrons, nos quais o processo de reversões é basicamente suprimido por períodos da ordem de 10^7 anos.

Da mesma forma o dínamo solar apresenta além do ciclo solar de 11 anos, modulações em escalas de tempo mais lentas, da ordem de 100 anos, além de outras ainda mais lentas. Novamente, modelos contendo um único tripleto ressonante não seriam capazes de explicar este fenômeno.

Mostraremos então que modelos contendo vários tripletos, chamados clusters de tripletos ressonantes, além de modelos com parâmetros que variam com o tempo podem explicar a existência de superchrons e das modulações no ciclo solar.

Mostraremos primeiramente alguns resultados sobre clusters de tripletos mais simples encontrados na literatura e a seguir introduziremos modelos para modulações de longo período do ciclo solar e para os superchrons.

4.1 Modelos contendo dois tripletos

- quatro ondas:

Há basicamente duas formas de acoplar dois tripletos de ondas, via um modo ou via dois modos. Consideremos primeiramente o segundo caso, em que quatro ondas são acopladas via dois modos de forma a constituir dois tripletos de ondas ressonantes. Vamos considerar perturbações nos campos magnetohidrodinâmicos compostas por quatro ondas, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 \Omega_j e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{x} - \omega_j t)} \vec{R}(\vec{k}_j)$$

Suporemos ainda que sejam satisfeitas as relações de ressonância

$$\omega_1(\vec{k}_1) = \omega_2(\vec{k}_2) + \omega_3(\vec{k}_3)$$

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$$

e

$$\omega_2(\vec{k}_2) = \omega_3(\vec{k}_3) + \omega_4(\vec{k}_4)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4$$

Desta forma, os modos 1, 2 e 3 são ressonantes, assim como os modos 3, 4 e 5, como no diagrama abaixo:

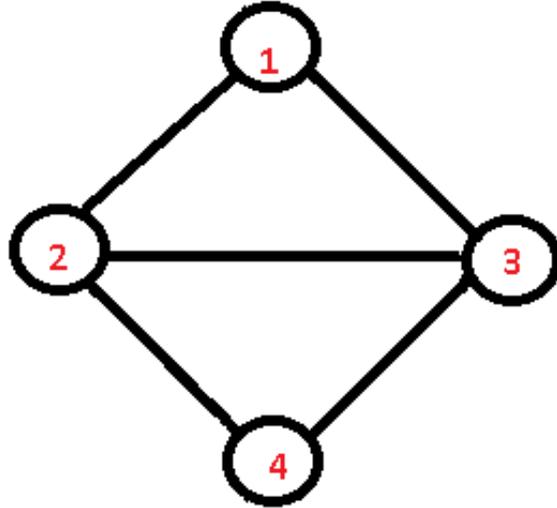


Fig. 4.1: Configuração esquemática de dois tripletos acoplados via duas ondas.

Neste caso a equação de evolução para as amplitudes dos modos é dada por

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_1 \Omega_2 \bar{\Omega}_3$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_2 \Omega_1 \bar{\Omega}_3 + C_4 \Omega_4 \bar{\Omega}_3$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = C_3 \Omega_1 \bar{\Omega}_2 + C_5 \Omega_4 \bar{\Omega}_2$$

$$\frac{d\Omega_4}{dt} = C_6 \Omega_2 \bar{\Omega}_3$$

(4.1)

Romeiras (1982) derivou tal sistema como a equação de Euler Lagrange, para a Lagrangiana

$$L = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^4 \pm (\Omega_i \frac{d\Omega_i}{dt}) + C_1 \Omega_1 \Omega_2 \bar{\Omega}_3 + C_2 \Omega_1 \bar{\Omega}_3 \Omega_4 + C_3 \Omega_3 \bar{\Omega}_2 \Omega_4 + C_4 \Omega_4 \bar{\Omega}_3 \Omega_2$$

encontrou quatro integrais do movimento associadas à simetrias do sistema via teorema de Noether, mostrando portanto a integrabilidade do sistema.

No caso em que há um mismatch entre as frequências, ou seja, quando as frequências são aproximadamente ressonantes, i.e.,

$$\omega_1(\vec{k}_1) \pm \omega_2(\vec{k}_2) \pm \omega_3(\vec{k}_3) = \delta_1$$

e

$$\omega_2(\vec{k}_2) \pm \omega_3(\vec{k}_3) \pm \omega_4(\vec{k}_4) = \delta_2$$

Chian ET AL (1996) mostraram que soluções deste tipo de sistema sofrem sucessivas bifurcações conforme o mismatch aumenta até atingir o caos. (Bustamante, 2013), mostrou que, ao contrario do acoplamento de dois tripletos via um modo, o acoplamento de dois tripletos via dois modos é um mecanismo eficiente de transferência de energia mesmo no caso em que a ressonância não é exata (em que há um mismatch).

cinco ondas:

Consideremos agora perturbações na função de corrente e no potencial vetor dadas pela superposição de cinco modos, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^5 \Omega_j e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{x} - \omega_j t)} \vec{R}(\vec{k}_j)$$

Consideremos o caso em que há dois conjuntos de tripletos ressonantes e que um dos modos (o modo 1 no caso) faz parte dos dois tripletos ressonantes. Como ilustrado no diagrama abaixo

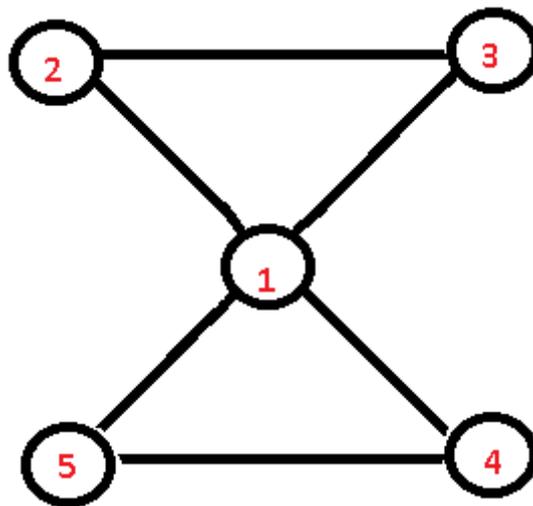


Fig. 4.2: Configuração esquemática de dois tripletos acoplados via um modo (modo 1).

Neste caso devem ser satisfeitas as relações de ressonância:

$$\omega_1(\vec{k}_1) = \omega_2(\vec{k}_2) + \omega_3(\vec{k}_3)$$

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$$

e

$$\omega_1(\vec{k}_1) = \omega_4(\vec{k}_4) + \omega_5(\vec{k}_5)$$

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_4 + \vec{k}_5$$

Neste contexto a equação de evolução para as amplitudes é descrita por:

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_1 \Omega_2 \overline{\Omega_3} + C_4 \Omega_4 \overline{\Omega_5}$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_2 \Omega_1 \overline{\Omega_3}$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = C_3 \Omega_1 \overline{\Omega_2} +$$

$$\frac{d\Omega_4}{dt} = C_4 \Omega_1 \overline{\Omega_5}$$

$$\frac{d\Omega_5}{dt} = C_5 \Omega_1 \overline{\Omega_4}$$

(4.2)

Em geral, o sistema acima pode não ser integrável.

Note que pelo fato de haverem dois tripletos acoplados, cada um dos tripletos podem ter escala temporal diferentes envolvidas, podendo a principio ser um modelo útil para explicar fenômenos com escalas temporais bastante distintas. Para ilustrar este efeito tomemos o sistema (4.2). Suponhamos que temos condições iniciais $\Omega_4(0) =$

$\Omega_5(0) = 0$. As equações para as amplitudes 4 e 5 tem condição inicial nula e derivada nula, implicando $\Omega_4(t) = \Omega_5(t) = 0$ para todo tempo. Redizindo o sistema (2) a

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_1 \Omega_2 \overline{\Omega_3}$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_2 \Omega_1 \overline{\Omega_3}$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = C_3 \Omega_1 \overline{\Omega_2}$$

(4.3)

O sistema acima, como discutido anteriormente, apresenta soluções periódicas.

Por outro lado, se definirmos as condições iniciais $\Omega_2(t) = \Omega_3(t) = 0$ o sistema se reduz à

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = +C_4 \Omega_5 \overline{\Omega_4}$$

$$\frac{d\Omega_4}{dt} = C_6 \Omega_1 \overline{\Omega_5}$$

$$\frac{d\Omega_5}{dt} = C_5 \Omega_1 \overline{\Omega_4}$$

(4.4)

O qual também apresenta solução periódica, em geral com período diferente do período do sistema (3.3).

Este sistema não é integrável em geral (Kartashova, 2011), contudo é integrável em diversos casos com simetria (Weilard, 1977, Meiss, 1978). No caso em que as amplitudes são fixadas reais (como no nosso caso), pode-se reduzir as cinco equações a duas equações sendo o sistema portanto integrável por quadratura.

4.2 Um modelo para as modulações do ciclo solar.

O ciclo solar de Schwabe tem aproximadamente 11 anos, contudo o ciclo não é constante, inclusive em duração, pois há registros de ciclos que duraram 8 anos assim

como outros que duraram 13 anos (Jager ET AL, 2011). O ciclo também varia em amplitude, já que o número de manchas solares em cada máximo de atividade solar varia com o tempo, tendo sido tão baixo quanto poucas dezenas durante o mínimo de Maunder e tão alto quanto duzentas. Modelos de quatro ou cinco ondas acopladas não são suficientemente irregulares (ou caóticas) para explicar esta variabilidade apresentada no ciclo solar (a não ser que consideremos interações que não são exatamente ressoantes). Precisamos então de um modelo que ao mesmo tempo mantenha a ciclicidade de aproximadamente 11 anos e apresente uma modulação nos ciclos na escala de 100 anos, além de apresentar flutuações no ciclo de 11 anos.

Utilizaremos um modelo de seis ondas acopladas em forma de três tripletos, sendo que um triplete terá escala lenta de modulação da amplitude dos modos, que representará a modulação da atividade solar na escala de 100 anos. Outro triplete terá escala rápida de variação das amplitudes modais, representando o ciclo de 11 anos. As equações para as amplitudes espectrais neste caso serão dadas por

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_1 \Omega_2 \overline{\Omega_3}$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_2 \Omega_1 \overline{\Omega_3} + C_4 \Omega_4 \overline{\Omega_3}$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = C_3 \Omega_1 \overline{\Omega_2} + C_5 \Omega_4 \overline{\Omega_2}$$

$$\frac{d\Omega_4}{dt} = C_6 \Omega_2 \overline{\Omega_3} + C_7 \Omega_5 \overline{\Omega_6}$$

$$\frac{d\Omega_5}{dt} = C_6 \Omega_4 \overline{\Omega_6}$$

$$\frac{d\Omega_6}{dt} = C_7 \Omega_4 \overline{\Omega_5}$$

(4.5)

E as relações de ressonância:

$$\omega_1(\vec{k}_1) = \omega_2(\vec{k}_2) + \omega_3(\vec{k}_3)$$

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$$

$$\omega_1(\vec{k}_1) = \omega_2(\vec{k}_2) + \omega_4(\vec{k}_4)$$

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_4$$

E

$$\omega_4(\vec{k}_4) = \omega_5(\vec{k}_5) + \omega_6(\vec{k}_6)$$

$$\vec{k}_4 = \vec{k}_5 + \vec{k}_6$$

Supondo ainda que

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

$$2\omega_1 \approx \omega_3$$

$$\omega_1, \omega_2 \gg \omega_4$$

O formato deste cluster de tripletos ressonantes é ilustrado no diagrama abaixo.

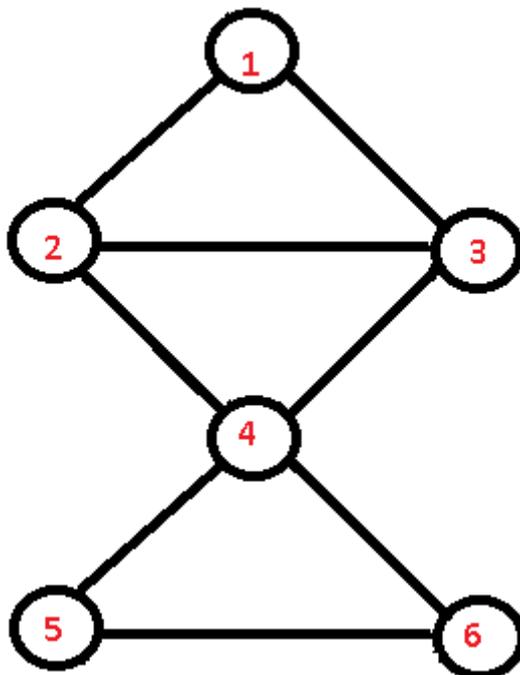


Figura 4.3: cluster de seis ondas acopladas em três tripletos ressonantes

Este tipo de sistema apresenta uma dinâmica bastante irregular, apresentaremos soluções para alguns conjuntos de condições iniciais.

Um exemplo no qual este fenômeno ocorre é dado pelo seguinte conjunto de tripletos calculados para o taoclina solar com parâmetro $V_a=300\text{m/s}$

Tripleto 1:

	H	H	M
k	1	18	19
l	1	2	3
frenquencia (x10E-5 Hz)	-2,25	-1,23	1,02

Tripleto 2:

	H	H	M
k	1	18	19
l	5	2	3
frenquencia (x10E-5 Hz)	-0,19	-1,23	1,02

Tripleto 3:

	H	H	M
k	1	5	4
l	5	4	1
frenquencia (x10E-5 Hz)	-0,19	0,13	0,05

A evolução do valor absoluto da amplitude da onda de Rossby magnética com número de onda (18,2) é apresentada a seguir:

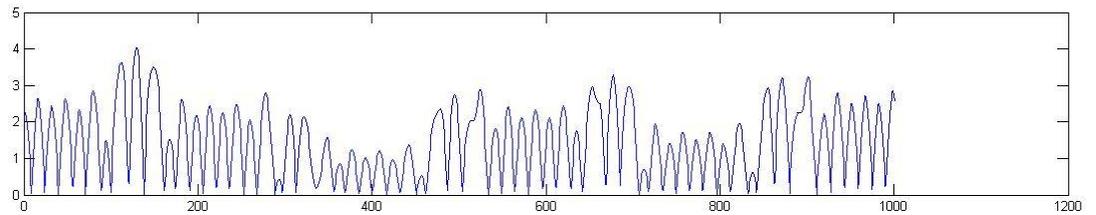


Figura4.4: Evolução para amplitude (valor absoluto) da componente de Rossby Magnética com número de onda (19, 3) do tripleto 1 segundo a tabelas acima.

Ondas do tripleto 3 evoluem de forma regular (periódica) numa escala de tempo uma ordem de grandeza mais lenta que o tripleto rápido como pode ser visto abaixo na amplitude do modo H(5,4).

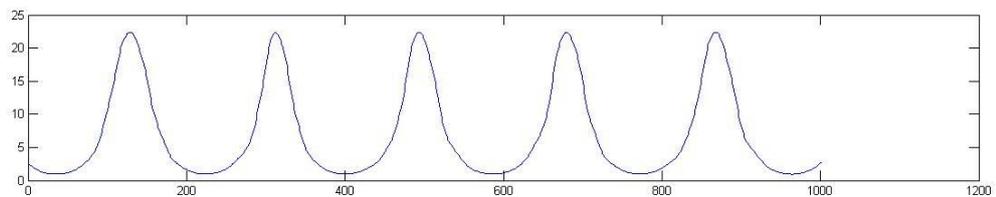


Figura 4.5: Evolução temporal da amplitude (valor absoluto) da componente de Rossby MHD , ramo hidrodinâmico, com número de onda zonal $k = 5$ e número de onda meridional $l = 4$, representada como H(5,4) no tripleto 3 da Tabela 4.1. (indicar qual eixo é o tempo, com a unidade, e qual é a amplitude. Fazer isto para todas as figuras deste tipo)

Notamos que este modelo é capaz de produzir modulações nos máximos de cada 85 em uma escala temporal de aproximadamente 100 anos, que corresponde a cerca de 10 ciclos, as modulações são irregulares, no sentido que o mesmo padrão não se repete, sugerindo que este modelo apresenta caos hamiltoniano. O modelo também apresenta flutuações em torno do ciclo de 10 anos.

O padrão de modulações na amplitude da onda de Rossby associada (segundo o nosso modelo) ao ciclo solar segue um padrão semelhante à modulação na escala de 100 anos do ciclo solar (ver figura abaixo).

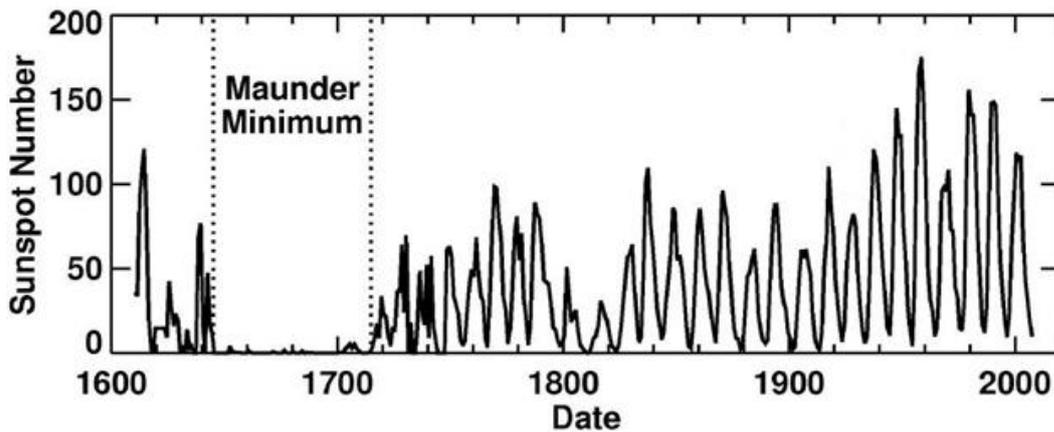


Figura 4.6: número de manchas solares ao longo do tempo, nota-se a existência de um ciclo na escala de de anos sobreposta por modulação na escala de cem anos, em particular entra a metade do século XVII e início do século XVIII a atividade foi quase nula, constituindo o chamado mínimo de Maunder. (Thomas, 2008 de D.Hathaway)

Ressaltamos que nosso modelo não apresenta modulações próximas de zero como é o caso da série temporal do número de manchas solares, que na época do mínimo de Maunder apresentou um número muito pequeno de manchas mesmo durante os picos do ciclo de Schwabe. Contudo, estamos apresentando a série temporal da amplitude de uma onda de Rossby, como discutido no capítulo 2. O número de manchas solares é reflexo da perturbação das ondas de Rossby no campo magnético via instabilidade de Parker-Rayleigh-Taylor, mas não é atividade das ondas de Rossby em si. Portanto, deve haver amplitude limite abaixo da qual a instabilidade não ocorre. A existência do mínimo de Maunder, portanto, não está em desacordo com nossos resultados.

4.3 Modelos para os Superchrons:

Como indicado em Gissinger (2012), modelos do tipo apresentado no capítulo 3 apresentam estatística que se aproximam da estatística de Poisson para a duração distribuição dos períodos de polaridade. Isto poderia sugerir uma falta de memória do sistema.

Carbone ET AL (2006) mostraram, contudo, que a estatística da duração de cada polaridade nos dados observados (Cande ET AL, 1995) é bastante diferente da estatística de Poisson. Os autores mostraram que a estatística de Levy seria um bom modelo para distribuição de chrons. A distribuição de Levy é uma estatística de cauda pesada, estando relacionada com processos de memória longa como processos de

difusão anômala. Como discutido em (Beck, 2008), a existência de memória longa pode surgir a existência de sistemas dinâmicos com separação de escalas. Iremos propor então generalizações dos modelos introduzidos no capítulo 3 que incluir efeitos de separação de escalas. Estes modelos, como veremos, serão capazes de gerar eventos do tipo superchron.

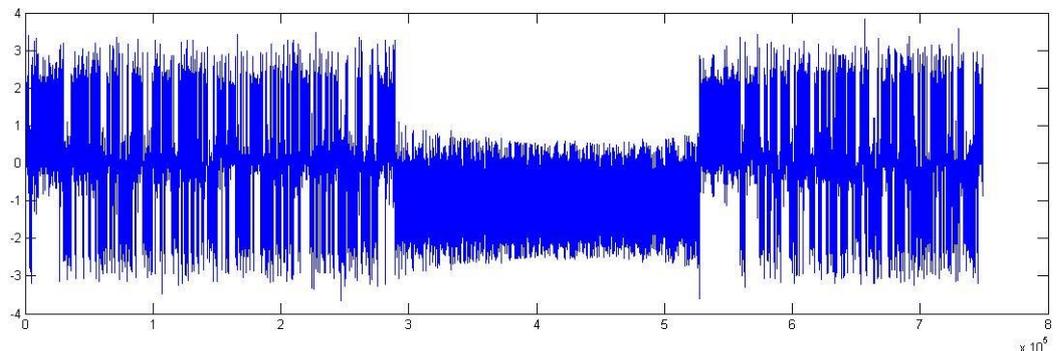
A primeira possibilidade é termos superchrons gerados por alterações na interface manto núcleo de podem alterar a distribuição de temperatura nesta interface e consequentemente alterar as forças térmicas do sistema.

Como indicado no capítulo 3, a frequência de reversões do modelo apresentado depende fortemente do parâmetro que representa a forças térmicas. Fazendo este parâmetro variar no tempo (seguindo uma função trigonométrica) temos um modelo que segue a seguinte equação:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} &= C_1\Omega_2\Omega_3 + \mu\Omega_1 \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= C_2\Omega_1\Omega_3 - \gamma\Omega_2 \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= -\Omega_3 + F(t) + C_3\Omega_1\Omega_2\end{aligned}\tag{6}$$

Com $\mu = 1.2$, $\gamma = 0.1$, $F = 0,05\cos(\omega t)$

Obtemos então a seguinte solução para o modelo, ilustrada na figura 4.7, 4.8 e 4.9:



4.7. Evolução temporal da componente dipolar com F variando periodicamente (unidades de integração).

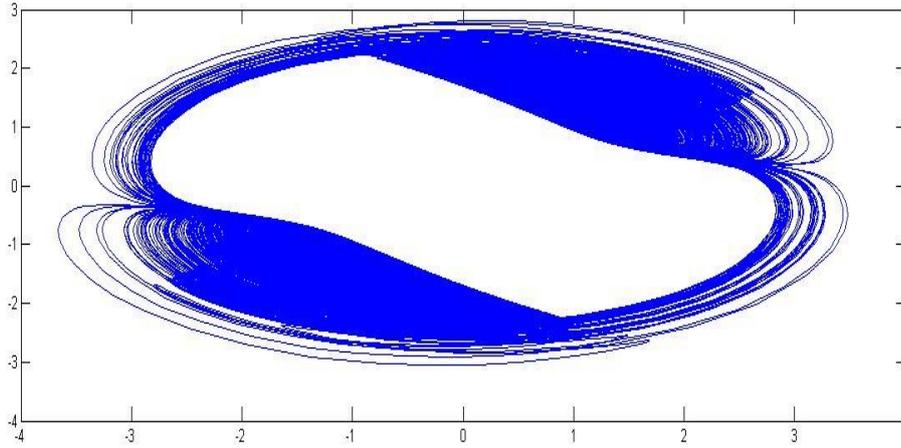


Fig. 4.8: Transições entre as bacias de atração no plano (x,y), entre os tempos 0 e 250000 (unidades de integração).

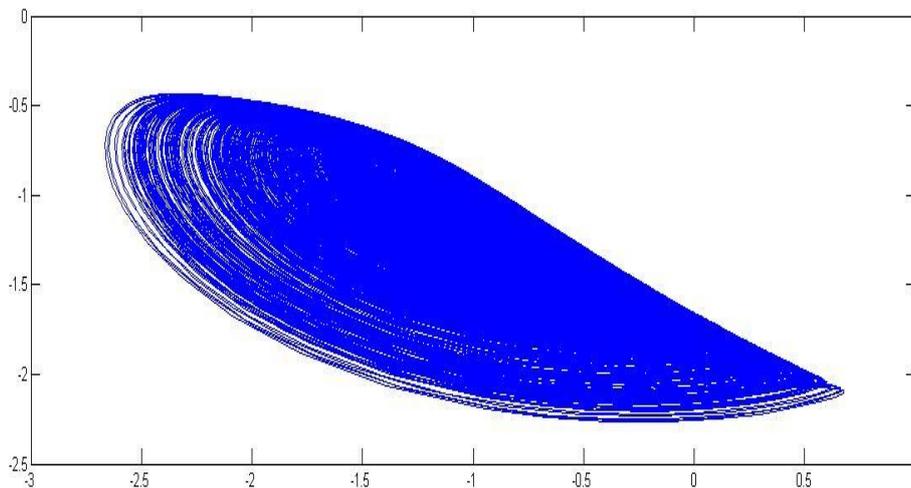


Fig. 4.9: Trajetoria no plano (x,y), entre os tempos 300000 e 500000. (unidades de integração)

Notamos nas Figuras 4.7 a 4.9 a existência de um período em que o sistema permanece estável por muito tempo na bacia de atração de um dos atratores.

Outra possibilidade para gerar eventos do tipo superchron é acoplar ao modelo apresentado no capítulo 3 um tripleto de evolução lenta. Neste caso, o sistema seria descrito em termos das amplitudes dos modos de acordo com

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_1\Omega_2\Omega_3 + \mu\Omega_1$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_2 \Omega_1 \Omega_3 - \gamma \Omega_2$$

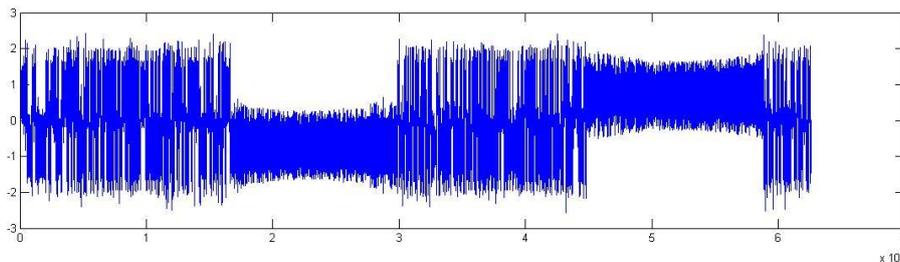
$$\frac{d\Omega_3}{dt} = -\Omega_3 + F + C_3 \Omega_1 \Omega_2 + C_4 \Omega_4 \Omega_5$$

$$\frac{d\Omega_4}{dt} = C_5 \Omega_4 \Omega_5 + C_6 \Omega_5 \Omega_6$$

$$\frac{d\Omega_5}{dt} = C_6 \Omega_4 \Omega_6$$

$$\frac{d\Omega_6}{dt} = C_7 \Omega_4 \Omega_5$$

Onde as ondas 4,5 e 6 representam um tripleto muito mais lento que o tripleto (1,2,3). Apresentamos um exemplo de solução para este tripleto abaixo.



4.7. Evolução temporal da componente dipolar com F variando periodicamente (unidades de integração).

4.4. Discussão

Os dínamos da Terra e do Sol apresentam uma rica dinâmica em sua variabilidade temporal. No caso da Terra, reversões de polaridade podem ocorrer tanto na escala temporal de cem mil anos quanto na escala de algumas dezenas de milhões de anos, como é o caso dos superchrons. No caso do Sol há modulações na amplitude do ciclo de Schwabe em diversas escalas de tempo, como na escala de 80 anos, 200 anos e 2000 anos (Jager, ET AL, 2011).

Modelos teóricos de baixa ordem para dínamos devem ter entre seus ingredientes uma separação de escalas para explicar tal variabilidade.

No caso das modulações dos ciclos do dínamo solar numa escala de tempo lenta propusemos um modelo conservativo (hamiltoniano) resultante do acoplamento de

seis ondas organizadas em conjuntos de três tripletos conservativos, sendo este um dos menores conjuntos de tripletos ressonantes a apresentar comportamento caótico.

Escolhendo um tripleto com troca de energia na escala de 10 anos e outro tripleto com período de troca de energia na escala de 100 anos fomos capazes de reproduzir as irregularidades tanto na modulação da amplitude do ciclo rápido quanto as flutuações em sua frequência de ocorrência.

No caso do superchron geomagnético, levantamos duas possibilidades. Na primeira, variações na taxa de reversões seriam resultado de variações na escala de dezenas de milhões de anos de forçantes térmicas do sistema.

É sabido que a base do manto é uma camada heterogênea que pode influenciar a dinâmica do núcleo externo (Olson, 2013). Em particular, nosso modelo apresenta forte dependência no parâmetro que representa forçantes térmicas do sistema, e esta dependência é refletida na taxa de reversões, que para determinados valores deste parâmetro podem ser muito frequentes enquanto que para outros valores podem não ocorrer. Em particular, fazendo o parâmetro variar periodicamente, somos capazes de fazer o sistema transitar entre um regime em que ocorrem reversões para outro regime em que reversões não ocorrem, caracterizando um superchron.

Levantamos ainda a possibilidade da existência de tripletos ressonantes com interação lenta, cujas trocas de energia ocorrem na escala de dezenas de milhões de anos. Lembrando que para condições iniciais das equações dos tripletos próximas de condições degeneradas, é possível a existência de orbitas arbitrariamente longas.

Acoplado um tripleto com troca de energia lenta com o modelo previamente proposto para as reversões somos novamente capazes de reproduzir um comportamento que se assemelha ao dos superchrons.

A distinção entre ambos os mecanismos pode ser difícil, e deve-se basear no estudo de possíveis coincidências entre superchrons e eventos tectônicos que possam alterar a interface manto-núcleo. Também é importante estudar a existência de superchrons mais antigos verificando a possibilidade de uma periodicidade na ocorrência de tal tipo de fenômeno.

Capítulo 5: Conclusão e possíveis extensões do trabalho

5.1. Conclusões

Estrutura do diagrama de borboleta

A atividade solar é concentrada numa faixa latitudinal de aproximadamente -40° a 40° , onde no início do ciclo manchas aparecem em médias latitudes e com o passar do ciclo a atividade tende a migrar em direção ao equador, com cada vez mais manchas aparecendo cada vez mais próximas ao equador. Esta característica da atividade solar é comumente representada pelo diagrama de borboleta (ver seção 1.2).

Na teoria de dínamo solar a atividade representada pelo diagrama de borboleta é geralmente associada às ondas de dínamo, soluções em forma de onda da equação de indução magnética que surgem em modelos de dínamo cinemático (Charbonneau, 2005).

Ondas de dínamo não podem ser consideradas como um mecanismo auto consistente de origem da migração em direção ao equador da atividade solar já que não são modos normais do sistema, pois o efeito de *feedback* da força de Lorentz sobre o campo de velocidades é negligenciado neste tipo de mecanismo.

Mostramos que ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas surgem naturalmente como uma das possíveis soluções características do modelo de água rasa magnetohidrodinâmico, uma aproximação bi-dimensional das equações da magnetohidrodinâmica que é adequada para descrever a dinâmica em uma camada fina, como é o caso da tacoclina solar (ou a fotosfera). Este resultado já havia sido apontado por autores como (Zaqarashvili et al. , 2007).

Considerando um perfil de rotação diferencial realista mostramos que surge uma guia de ondas para o ramo magnético das ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas (modo lento) na faixa latitudinal entre as latitudes de aproximadamente $\pm 35^\circ$, guia de ondas este que é quantificado pela estimativa da distribuição latitudinal do número de onda estacionário. A teoria WKB linear (Majda, 2003) prevê ainda que tais ondas sejam refratadas em direção à latitude de valor máximo do número de onda estacionário, que está situado no equador.

Este resultado sugere que ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas imersas num perfil de rotação diferencial contento um jato equatorial são fortes candidatas a serem responsáveis pela migração em direção ao equador da atividade solar, assim como seu confinamento numa faixa de -35° a 35° em torno do equador.

O ciclo solar

A atividade solar apresenta um comportamento notadamente cíclico, sendo o ciclo mais evidente o de aproximadamente 11 anos, chamado ciclo de Schwabe. Tal ciclo pode ser facilmente determinado observando-se a contagem de manchas solares ao longo do tempo.

Associado ao ciclo de 11 anos da atividade solar está a reversão de polaridade do campo magnético solar. Estas reversões ocorrem com a mesma frequência e sempre ocorrem no máximo na atividade solar. Por outro lado, o dipolo sempre tem sua amplitude máxima no mínimo da atividade solar.

Esta relação entre a atividade das manchas solares e as reversões do dipolo do campo magnético sugere que há um mecanismo não linear acoplando estas duas componentes do campo. Com isso, no presente trabalho estudamos a dinâmica das interações não lineares no contexto das ondas de Rossby magneto-hidrodinâmicas. Como as não linearidades no presente modelo MHD são quadráticas, essas interações entre ondas ocorrem sempre em conjuntos de tripletos e promovem trocas de energia entre as diferentes modos que compõem o triplete. Tais trocas de energia são evidenciadas na variação da amplitude das ondas ao longo do tempo.

Derivamos as equações para interações não lineares ressonantes entre ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas. Interações entre estas ondas ocorrem sempre em conjuntos de três ondas, chamados tripletos e promovem troca de energia entre as diferentes ondas que compõem o triplete, troca esta que é evidenciada na variação da amplitude das ondas ao longo do tempo.

De forma genérica, a solução das equações reduzidas para um único triplete ressonante é periódica no tempo e pode ser escrita em termos das funções elípticas de Jacobi (Craik, 1985). Neste contexto, as amplitudes dos modos evoluem numa escala de tempo mais lenta que o período das ondas que compõem o triplete. Para alguns exemplos representativos de tripletos ressonantes aqui analisados, obtivemos períodos de troca de energia compatíveis com o período do ciclo solar (de Schwabe).

Com isto, podemos propor um mecanismo teórico para o ciclo solar de 11 anos. Consideramos três ondas de Rossby acopladas, sendo uma delas do maior comprimento de onda permitido no sistema representando o dipolo, e as outras duas ondas sendo de menor escala espacial. Quando a onda dipolar tem sua amplitude máxima, os outros dois modos tem amplitudes mínimas. Neste contexto, sendo o modo dipolar o modo instável do triplete ressonante, ele passa a transferir energia para as ondas de menor escala espacial cuja amplitude aumenta com o tempo. Devido à existência de uma guia de ondas resultante da rotação diferencial do Sol, as ondas de Enquanto se propagam nesta região com amplitude maior que a inicial a atividade solar passa a ser observada e migra em direção ao equador.

Quando a atividade das manchas solares é máxima os modos de menor escala receberam toda a energia inicialmente no dipolo. Em seguida as ondas de menor escala passam a ceder energia para o dipolo que passa a crescer em amplitude na direção oposta à inicial. Este processo continua até o dipolo se estabelecer com amplitude máxima. Neste ponto temos novamente um mínimo da atividade de manchas solares.

Chamamos atenção para o fato de que as manchas solares em si não são as ondas de Rossby, pois cada mancha possui uma escala de tempo de poucas dezenas de dias. Um possível mecanismo para a geração das manchas solares a partir das ondas de Rossby propagando-se em direção ao equador é a instabilidade de Parker-Reyleigh-Taylor (Parker, 1979). De fato, uma camada de fluido inicialmente em equilíbrio magnetostático pode ser instabilizada devido à alteração do campo magnético. Adicionalmente, ao se propagar uma onda de Rossby magnetohidrodinâmica deve alterar o campo magnético ao seu redor, podendo assim promover uma instabilidade no campo de pressão, que neste caso é composta pela pressão termodinâmica e pela pressão magnética.

Modulações no ciclo solar

O ciclo solar de Schwabe (de 11 anos) não é constante em sua amplitude e nem em sua duração. Contando o máximo de manchas solares a cada ciclo notamos que ele pode variar entre poucas dezenas de manchas, como ocorreu durante o mínimo de Maunder, até poucas centenas de manchas como ocorreu no máximo moderno de atividade solar (com máximo por volta dos anos 1950) (Jager ET AL, 2011). São ainda observadas flutuações no período de ocorrência das manchas solares, podendo variar entre 8 anos e 13 anos (Jager ET AL, 2011).

Modelos contendo apenas um tripleto não são capazes de reproduzir esta variabilidade na amplitude e na duração dos ciclos solares, sendo necessário um modelo mais complexo que possa apresentar um comportamento caótico mas também preserve alguma regularidade, já que em primeira aproximação o ciclo solar é periódico. É necessário ainda que o modelo seja capaz de reproduzir uma modulação na escala de 80-100 anos.

Possíveis ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas que se propagam na taclina solar podem ser de dois tipos, magnéticas ou hidrodinâmicas, sendo as primeiras em geral consideravelmente mais lentas que as segundas. Este fato permite que ondas com escalas temporais e espaciais bastante distintas se acoplem. Tripletos formados por diferentes tipos de ondas terão diferentes períodos de troca de energia, uma vez que os coeficientes de acoplamento não linear são funções das frequências temporais dos modos.

Acoplando um tripleto cuja troca de energia ocorre numa escala de tempo mais lenta que o tripleto do ciclo solar foi possível obter soluções que apresentam modulações no ciclo e pequenas modulações no período. Este modelo foi resultado de um acoplamento de seis ondas organizadas em três tripletos ressonantes.

Apesar de termos escolhido tripletos de forma mais ou menos arbitrária, este mecanismo é robusto e pode ocorrer em muitos conjuntos de seis ondas interagindo no qual há um tripleto com escala temporal mais lenta que o outro.

Reversões do campo geomagnético

O campo geomagnético, em particular seu modo dipolar, apresenta uma dinâmica mais irregular que o campo magnético solar. Em particular, não há periodicidades tão evidentes quanto àquelas presentes no dínamo solar. As reversões de polaridade do dipolo do campo magnético terrestre podem ocorrer numa taxa que vai de uma vez a cada cem mil anos, até a uma vez a cada 40 milhões de anos.

A irregularidade no processo de reversões sugere que um modelo de baixa ordem para as reversões do campo magnético terrestre deve ser caótico. Assim, neste trabalho desenvolvemos também um modelo teórico para a reversão do campo magnético terrestre baseado na interação não linear ressonante entre ondas de Rossby. Ao contrário do modelo para o ciclo solar, incluímos forçantes, representativas da convecção e de instabilidades, e dissipação. Dependendo da combinação de parâmetros o modelo de três ondas pode apresentar reversões caóticas de polaridade entre dois valores de equilíbrio das equações reduzidas.

A frequência de reversões do nosso modelo teórico apresenta uma forte dependência nos parâmetros, entre eles o parâmetro representativo de forçantes térmicas (associados à convecção). Para determinados valores deste parâmetro há regimes em que não há reversões, enquanto para outros valores o modelo apresenta uma taxa muito alta de reversões.

Este resultado pode sugerir que variações temporais de temperatura na escala de dezenas de milhões de anos na interface manto-núcleo podem controlar a taxa de reversões.

Superchrons

Registros paleomagnéticos do dipolo revelam a existência de períodos em que o campo geomagnético permaneceu dezenas de milhões de anos sem apresentar

reversões. O mais conhecido entre estes períodos é o Superchron normal do Cretáceo, que ocorreu aproximadamente entre 120 e 80 milhões de anos atrás.

Como evidenciado na dependência com relação à forçantes térmicas do modelo para reversões do campo geomagnético, uma possível causa para os superchrons seria uma combinação de valores para as forçantes de forma a deixar o sistema em um estado que não apresente reversões.

Fazendo o parâmetro que representa a forçante térmica variar com o tempo periodicamente podemos reproduzir uma série temporal na qual o sistema fica longos períodos em um estado “reversivo” e repentinamente passa para um estado não reversivo, no qual ele permanece muito tempo.

Há ainda a possibilidade de haver fenômenos do tipo Superchrons gerados apenas pela interação de dois tripletos ressonantes, sendo um deles com frequência de troca de energia muito mais baixa que o outro.

Isto é possível particularmente num modelo de tripletos acoplados onde um dos tripletos apresenta condições iniciais próximas de condições degeneradas para os quais o período de troca de energia torna-se infinito (Longuet-Higgins, 1967). A distinção a partir dos dados entre os dois mecanismos apresentados para a existência de superchrons pode ser muito difícil.

5.2. Sugestões para Trabalhos futuros

Extensão para geometria esférica

A identificação dos tripletos responsáveis pelos mecanismos propostos acima pode ser feita de maneira mais próxima da realista apenas em coordenadas esféricas, já que ambos os fenômenos ocorrem em corpos aproximadamente esféricos.

Ondas de Rossby na esfera são denominadas, na literatura de ciências atmosféricas, como ondas de Rossby-Haurwitz (Silbermann, 1954). Interações não lineares entre ondas de Rossby-Haurwitz foram estudadas na literatura (Lynch, 2008), (Burzlaff et al, 2009).

Condições para interações de ondas na esfera são diferentes das relações de ressonância em coordenadas cartesianas. A interação neste caso ocorre sujeita à

integrais de produtos de harmônicos esféricos (Jones, 1985), podendo ser determinadas a partir do cálculo do símbolo $3j$ de Wigner.

Estudo de instabilidades com campo básico realista

Modos energeticamente dominantes nos sistemas apresentados são geralmente aqueles que apresentam maior taxa de crescimento prevista pela teoria de instabilidade linear. Uma forma de determinar conjuntos de ondas relevantes para a construção de modelos de baixa ordem para o dínamo solar e terrestre é encontrar as ondas mais instáveis quando sujeitas a campos básicos realistas (escoamento e campos magnéticos).

Em particular, instabilidades surgindo nos sistemas estudados devem ser generalizações das instabilidades barotrópicas e baroclínicas que aparecem no contexto das ondas de Rossby hidrodinâmicas (Salmon, 1998).

Previsibilidade do ciclo solar

O ciclo solar gera fortes impactos na nossa civilização, tanto via impactos nas telecomunicações em casos de fortes tempestades solares, como possíveis impactos no clima da Terra (Jager ET AL, 2011), (Frigo, 2013).

O modelo teórico proposto para a modulação da atividade solar é um sistema hamiltoniano de baixa ordem, com seis variáveis (contudo, contendo apenas três graus de liberdade devido à existência de três constantes integrais do sistema). Um dos ingredientes essenciais do sistema é a existência de uma separação de escalas entre dois conjuntos de tripletos.

Modelos hamiltonianos de baixa ordem com separação de escalas para o ciclo solar apresentam uma interessante possibilidade para fornecer previsões de curto prazo para a atividade solar.

Em (Chorin ET AL, 2002) foi apresentado um formalismo para previsão ótima em modelos hamiltonianos com separação de escalas no qual a dinâmica é separada numa variedade lenta e em uma variedade rápida. Neste caso, a dinâmica é então projetada nestas variedades utilizando um formalismo de Mori-Zwanzig (Zwanzig, 1973).

Apêndice 1.

Dinâmica não linear de ondas de Rossby em um modelo quase-geostrófico magnetohidrodinâmico.

Introdução

Ondas de Rossby (Rossby, 1939) surgem como soluções das equações que regem a dinâmica de fluidos geofísicos. Três sistemas hidrodinâmicos de equações de equações que apresentam ondas de Rossby como soluções, em ordem de complexidade decrescente, são as equações de Boussinesq com Rotação, as equações da água rasa e as equações quase-geostróficas. Entre essas o modelo mais simples é a equação quase-geostrófica introduzida em (Charney, 1948), tendo sido utilizada na primeira previsão numérica de tempo. A equação quase geostrófica escreve-se

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0$$

Onde

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

E a chamada vorticidade potencial é dada por:

$$q = \nabla^2 \psi + f$$

f sendo o parâmetro de Coriolis e ψ a função de corrente.

A vantagem das equações quase-geostróficas é que elas filtram as ondas de gravidade que aparecem em modelos mais complexos, ondas de gravidade são caracteristicamente de pequena escala espacial/temporal, podendo ser vistas como ruído para a dinâmica de grande escala.

Apresentaremos aqui a análise linear e fracamente não linear de uma generalização magnetohidrodinâmica deste sistema. Veremos que generalizações magnetohidrodinâmicas de ondas de Rossby aparecem como soluções deste sistema de equações.

Nos capítulos seguintes esta análise será aplicada ao sistema aos casos específicos da tacoclina solar e do núcleo externo terrestre. No caso da tacoclina solar o sistema de equações quase-geostróficas magnetohidrodinâmicas surgem uma aproximação do sistema de equações da água rasa magnetohidrodinâmica introduzidas por (Gilman, 2000) com a inclusão da força de Coriolis. Assim como sua análoga hidrodinâmica, este sistema filtra ondas de

gravidade.

No caso do núcleo externo terrestre este sistema de equações surgirá como uma simplificação das equações do plano beta de (Hide,1966). Como o núcleo externo terrestre é confinado por uma fronteira sólida (a base do manto terrestre) ondas de gravidade não se manifestam, contudo numa possível generalização com estratificação ondas de gravidade surgirão. Neste sentido as equações quase-geostróficas magnetohidrodinâmicas simplificam a análise linear.

Por surgir como simplificação de sistemas de equações diferentes sua dedução será para cada caso específico será feita nos capítulos 3 e 4.

Equações quase geostróficas magnetohidrodinâmicas.

O sistema de equações quasegeostróficas magnetohidrodinâmicas escreve-se

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi + f)}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2\psi + f) = \frac{1}{\mu_0\rho}J(A, \nabla^2A) + \nu\nabla^2\nabla^2\psi + K(\nabla^2\psi + f)$$

$$\frac{\partial\nabla^2A}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2A) = \eta\nabla^2\nabla^2A + K\nabla^2A$$

Introduzindo campos básicos na direção meridional e zonalmente simétricos

$$\vec{U}_T(x, y) = U(y)\vec{i}$$

E

$$\vec{B}_T(x, y) = B(y)\vec{i}$$

Obtemos:

$$\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t} = -U(y)\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} + (\beta - U''(y))\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{\mu_0\rho}B(y)\frac{\partial\nabla^2A}{\partial x} + B''(y)\frac{\partial A}{\partial x} + \nu\nabla^2(\nabla^2\psi)$$

(1a)

$$\frac{\partial \nabla^2 A}{\partial t} = -U(y) \frac{\partial \nabla^2 A}{\partial x} + B''(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + B(y) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - U''(y) \frac{\partial A}{\partial x} + 2B'(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - 2U'(y) \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + \eta \nabla^2 (\nabla^2 A)$$

(1b)

Problema linear: modos normais

Gostaríamos de encontrar a relação de dispersão para ondas associadas ao sistema de equações (1a)-(1b) linearizados. Desprezaremos então todos termos não lineares da equação.

Para calcular a relação de dispersão vamos considerar ainda $U(y) = 0$, $v = \eta = 0$, $B(y) = cste$.

Seja \mathcal{L} o operador diferencial linear com coeficientes constantes associado ao sistema de equações (1) dado por:

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\mu_0 \rho} B_0 \frac{\partial \nabla^2}{\partial x} \\ B_0 \frac{\partial \nabla^2}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}$$

(2)

Podemos obter a matriz \mathcal{L}^* chamada símbolo do operador diferencial supondo que as soluções para $\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}$ sejam periódicas, definimos então \mathcal{L}^* como:

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{pmatrix} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \mathcal{L}^*(i\vec{k}) \vec{R}$$

(3)

Onde o vetor \vec{R} é um autovetor da matriz $\mathcal{L}^*(i\vec{k})$ e $\vec{k} = (k, l)$ é o vetor de onda.

A matriz $\mathcal{L}^*(i\vec{k})$ associada ao operador (2) é portanto:

$$\mathcal{L}^*(i\vec{k}) = \begin{bmatrix} \beta ik & \frac{1}{\mu_0 \rho} B_0 ik |k|^2 \\ B_0 ik |k|^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Problema de autovalores

Para obtermos a relação de dispersão associada ao sistema (1) devemos resolver a equação característica:

$$\det \left(-i\omega I - \frac{1}{|k|^2} \mathcal{L}^*(i\vec{k}) \right) = 0 \quad (5)$$

De onde tiramos as expressões:

$$\omega_+ = \frac{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4v_A^2 |\vec{k}|^4} \right) k}{2|\vec{k}|^2} \quad (6)$$

E

$$\omega_- = \frac{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4v_A^2 |\vec{k}|^4} \right) k}{2|\vec{k}|^2} \quad (7)$$

Onde $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$ é a velocidade das ondas de Alfvén.

Estas são as relações de dispersão para as chamadas ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas, chamaremos o modo associado à relação de dispersão (6) de modo magnético e o modo associado à relação de dispersão (7) de modo magnético.

Há uma razão para tais nomenclaturas, suponhamos que $\beta = 0$ em (6), segue então que a relação de dispersão se reduz à:

$$\omega_1 = \frac{B_0 k}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad (8)$$

Que é a relação de dispersão para as ondas de Alfvén que é um modo magnético no sentido que não é afetado pela força de Coriolis.

Por outro lado se $B_0 = 0$

$$\omega_2 = \frac{\beta k}{|\vec{k}|^2} \quad (9)$$

Que é a relação de dispersão para as ondas de Rossby que é um modo puramente hidrodinâmico, não sendo afetado pelas força magnética.

Notamos no caso $\beta^2 \gg 4v_A^2 |\vec{k}|^4$, que geralmente é válido para as grandes escalas dos sistemas podemos expandir a raiz no termo

$$\frac{4v_A^2 |\vec{k}|^4}{\beta^2} \ll 1$$

De onde temos

$$\omega_+ = \frac{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4v_A^2 |\vec{k}|^4}\right) k}{2|\vec{k}|^2} \approx -\frac{\beta k}{|\vec{k}|^2}$$

E

$$\omega_- = \frac{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4v_A^2 |\vec{k}|^4}\right) k}{2|\vec{k}|^2} \omega_- \approx v_A^2 \frac{|\vec{k}|^2 k}{\beta}$$

Neste regime as ondas magnéticas tem freqüência menor que as ondas hidrodinâmicas.

Problema de autovetores

A matriz $\mathcal{L}^*(i\vec{k})$ tem autovalores ω_1 e ω_2 dados pelas equações (6) e (7) para encontrar seus autovetores devemos resolver a equação:

$$\mathcal{L}^*(i\vec{k})\vec{R}^\alpha(\vec{k}) = \lambda_\alpha \vec{R}^\alpha(\vec{k}) \quad (10)$$

Onde $\alpha = 1, 2$ e $\lambda_\alpha = \omega_\alpha(\vec{k})$.

Obtemos então as seguintes expressões:

$$\vec{R}^-(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \omega_-(\vec{k}) \\ B_0 |\vec{k}|^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\vec{R}^+(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \omega_+(\vec{k}) \\ B_0 |\vec{k}|^2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Os autovetores $\vec{R}^-(\vec{k})$ e $\vec{R}^+(\vec{k})$ terão importante papel no cálculo dos coeficientes de interação na análise fracamente não linear.

Os autovetores à esquerda podem ser calculados por:

$$[\mathcal{L}^*(i\vec{k})]^T \vec{L}^\alpha(\vec{k}) = \lambda_\alpha \vec{L}^\alpha(\vec{k})$$

Onde

$$[\mathcal{L}^*(i\vec{k})]^T = - \begin{bmatrix} \beta ik & B_0 ik |k|^2 \\ \frac{1}{\mu_0 \rho} B_0 ik |k|^2 & 0 \end{bmatrix}$$

É o operador adjunto de $\mathcal{L}^*(i\vec{k})$

Modificação dos modos normais devido à campos básicos variáveis no espaço

Até agora consideramos um escoamento básico nulo e um campo magnético de fundo constante, contudo um escoamento básico variável pode modificar consideravelmente o comportamento do campo magnético. Estamos particularmente interessados no efeito de amplificação do campo magnético devido ao escoamento de fundo.

Um efeito semelhante a este é estudado da abordagem cinemática da teoria de dínamo e na eletrodinâmica do campo médio (Steenback et. AL, 1967), onde o chamado efeito alfa propicia um crescimento exponencial do campo magnético.

Da mesma forma que definimos um operador diferencial \mathcal{L} devido eliminando as contribuições de um escoamento básico e de um campo magnético variável vamos definir um operador linear \mathcal{L}_U devido à estes efeitos.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_U \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} -U(y) \frac{\partial \nabla^2}{\partial x} & B''(y) \frac{\partial}{\partial x} \\ \left(B''(y) \frac{\partial}{\partial x} + 2B'(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) & \left(U(y) \frac{\partial \nabla^2}{\partial x} - U''(y) \frac{\partial}{\partial x} - 2U'(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

O operador \mathcal{L}_U tem um símbolo associado

$$\mathcal{L}_U^*(i\vec{k}) = \begin{bmatrix} U(y)ik|k|^2 & B''(y)ik \\ (B''(y)ik - 2B'(y)kl) & (-U(y)ik|k|^2 - U''(y)ik + 2U'(y)kl) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Note que os autovalores da matriz $\mathcal{L}^*(i\vec{k})$ não são necessariamente os mesmo da matriz $\mathcal{L}_U^*(i\vec{k})$, por este motivo podem ocorrer diversos fenômenos como a ampliação das perturbações (por exemplo uma instabilidade) ou mesmo a modificação das perturbações de forma a projetar energia em outros modos. Para elucidar tais efeitos vamos supor uma campo composto por dois modos normais diferentes dado por:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} = \Omega_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega_1 t)} \vec{R}^{\alpha_1}(\vec{k}_1) + \Omega_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega_2 t)} \vec{R}^{\alpha_2}(\vec{k}_2) \quad (15)$$

A evolução temporal deste campo devido aos termos com escoamento básico nulo e campo magnético constante está completamente contida na nas exponenciais da forma $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$.

Consideremos a evolução do sistema devido à \mathcal{L}_U considerando a equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} = \mathcal{L}_U \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}$$

A evolução é dada por

$$\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}(t) = \exp(i t \mathcal{L}_U) \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}$$

Substituindo um campo na forma de (15) podemos escrever a evolução das amplitudes na forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

Onde

$$\gamma_{ij} = \langle \vec{R}^{\alpha_i}(\vec{k}_i), \mathcal{L}_U^* \vec{R}^{\alpha_j}(\vec{k}_j) \rangle$$

A evolução das amplitudes é dada por

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \end{pmatrix} = \exp(\mathbb{M}t) \begin{pmatrix} \Omega_1(0) \\ \Omega_2(0) \end{pmatrix}$$

Onde

$$M = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

Um crescimento exponencial das amplitudes será possível caso a matriz M apresente autovalores com parte real positiva, analogamente parte real negativa gera decrescimento exponencial, componentes imaginarias geram oscilações periódicas. Se V é uma transformação que diagonaliza M (ou coloca M em sua forma canônica de Jordan).

Interações não lineares

Consideremos um campo $\vec{W} = \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}$ expresso como na base dada por autofunções do operador \mathcal{L} :

$$\vec{W} = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \Omega_{\vec{k}}^{\alpha} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \vec{R}^{\alpha}(\vec{k})$$

A evolução temporal de \vec{W} pelo operador linear é dada por:

$$\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\vec{W} = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \Omega_{\vec{k}}^{\alpha} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \vec{R}^{\alpha}(\vec{k})$$

Consideremos o operador bilinear $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ dado por

$$\mathcal{B}(\vec{W}, \vec{W}) = \begin{cases} -(\vec{\nabla}^{\perp}\psi) \cdot \vec{\nabla}\nabla^2\psi + \frac{1}{\mu_0\rho} (\vec{\nabla}^{\perp}A) \cdot \vec{\nabla}\nabla^2A \\ -(\vec{\nabla}^{\perp}\psi) \cdot \vec{\nabla}\nabla^2A + (\vec{\nabla}^{\perp}A) \cdot \vec{\nabla}\nabla^2\psi \end{cases}$$

Substituindo o esta expressão no operador bilinear $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$, temos:

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}(\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\vec{W}, \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\vec{W}) \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{\vec{k}=\vec{k}_1+\vec{k}_2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)} \Omega_{\vec{k}_1}^{\alpha_1} \bar{\Omega}_{\vec{k}_2}^{\alpha_2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-(\omega_1+\omega_2)t)} \right\} \vec{R}^{\alpha}(\vec{k}) \end{aligned}$$

Onde $C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)}$ é o coeficiente de interação de três ondas com modos $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ e números de onda $(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$ respectivamente, cuja expressão geral é

$$C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)} = \langle \vec{L}^{\alpha}(\vec{k}), \mathcal{B}^*(\vec{R}^{\alpha_1}(\vec{k}_1), \vec{R}^{\alpha_2}(\vec{k}_2)) + (\vec{R}^{\alpha_2}(\vec{k}_2), \vec{R}^{\alpha_1}(\vec{k}_1)) \rangle$$

Aplicando a expressão para $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ nos autovalores de $\mathcal{L}^*(i\vec{k})$ temos que os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)} = & \left\{ \frac{|\vec{k}_2|^2(\vec{k}_1^{\perp} \cdot \vec{k}_2) + |\vec{k}_1|^2(\vec{k}_2^{\perp} \cdot \vec{k}_1)}{2} \left(\psi^{\alpha}(\vec{k})\psi^{\alpha_1}(\vec{k}_1)\psi^{\alpha_2}(\vec{k}_2) \right. \right. \\ & + \frac{\psi^{\alpha}(\vec{k})A^{\alpha_1}(\vec{k}_1)A^{\alpha_2}(\vec{k}_2)}{\mu_0\rho} - A^{\alpha}(\vec{k})\psi^{\alpha_1}(\vec{k}_1)A^{\alpha_2}(\vec{k}_2) \\ & \left. \left. + A^{\alpha}(\vec{k})A^{\alpha_1}(\vec{k}_1)\psi^{\alpha_2}(\vec{k}_2) \right) \right\} \end{aligned}$$

Onde

$$\vec{L}^{\alpha_j}(\vec{k}_j) = \begin{pmatrix} \psi^{\alpha_j}(\vec{k}_j) \\ A^{\alpha_j}(\vec{k}_j) \end{pmatrix}$$

Substituindo as equações (11) e (12) nas expressões de $C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)}$ temos:

$$C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)} = \left\{ \frac{|\vec{k}_2|^2(\vec{k}_1^\perp \cdot \vec{k}_2) + |\vec{k}_1|^2(\vec{k}_2^\perp \cdot \vec{k}_1)}{2} \left(i(B_0)^3 k |k|^2 k_1 |k_1|^2 k_2 |k_2|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{-B_0 i k |k|^2}{\mu_0 \rho \omega_1(\vec{k}_1) \omega_2(\vec{k}_2)} - \frac{(B_0)^2 k_1 |k_1|^2 k_2 |k_2|^2}{\omega(\vec{k})} + \frac{-B_0 i k_2 |k_2|^2}{\mu_0 \rho \omega(\vec{k}) \omega_1(\vec{k}_1)} \right) \right\}$$

A evolução de $\mathcal{B}(\exp[i(-t\mathcal{L})\vec{W}], \exp[i(-t\mathcal{L})\vec{W}])$ devido a \mathcal{L} é dada por:

$$\exp[t\mathcal{L}\mathcal{B}(\exp[i(-t\mathcal{L})\vec{W}], \exp[i(-t\mathcal{L})\vec{W}])] \\ = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{\vec{k}=\vec{k}_1+\vec{k}_2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)} \Omega_{\vec{k}_1}^{\alpha_1} \bar{\Omega}_{\vec{k}_2}^{\alpha_2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - (\omega_1 + \omega_2 - \omega)t)} \right\} \vec{R}^{\alpha}(\vec{k})$$

Fazemos então a média desta quantidade no intervalo $[0, t]$ e calculamos o limite desta média com $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial}{\partial T} \langle \vec{W} \rangle(T) \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ \int_0^t \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \left(\sum_{\vec{k}=\vec{k}_1+\vec{k}_2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)} \Omega_{\vec{k}_1}^{\alpha_1}(T) \bar{\Omega}_{\vec{k}_2}^{\alpha_2}(T) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - (\omega_1 + \omega_2 - \omega)s)} \right) \vec{R}^{\alpha}(\vec{k}) ds \right\} \\ = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{\vec{k}=\vec{k}_1+\vec{k}_2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} C_{(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)} \Omega_{\vec{k}_1}^{\alpha_1}(T) \bar{\Omega}_{\vec{k}_2}^{\alpha_2}(T) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\int_0^t e^{-i(\omega_1 + \omega_2 - \omega)s} ds \right) \right\}$$

Notamos que o integrando na expressão acima é uma função trigonométrica, ela tem média não nula se e somente se a função for constante, ou seja,

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Que é a condição de ressonância para três ondas, portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\int_0^t e^{-i(\omega_1 + \omega_2 - \omega)s} ds \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } (\omega_1 + \omega_2 - \omega) \neq 0 \\ 1 & \text{se } (\omega_1 + \omega_2 - \omega) = 0 \end{cases}$$

Tipos de interação

Dada a condição de ressonância $\omega = \omega_1 + \omega_2$ podemos os seguintes tipos de ressonâncias:

- três modos magnéticos, quando $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$
- três modos hidrodinâmicos, quando $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$
- dois modos magnéticos e um hidrodinâmico, por exemplo $\alpha = \alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$
- dois modos hidrodinâmicos e um magnético, por exemplo $\alpha = \alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0$

Algumas generalidades sobre tripletos ressonantes.

Dado um campo composto por três modos com amplitudes Ω , Ω_1 e Ω_2 , o sistema de equações que rege a evolução deste tripleto ressonante genérico com amplitudes complexas é escrita na forma:

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_1 \Omega_2 \bar{\Omega}_3$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_2 \Omega_1 \bar{\Omega}_3$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = C_3 \Omega_1 \bar{\Omega}_2$$

O sistema possui duas quantidades conservadas

$$I_{13} = |\Omega_1|^2 + |\Omega_3|^2$$

E

$$I_{23} = |\Omega_2|^2 + |\Omega_3|^2$$

Além da Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \text{Im}(\Omega_1 \Omega_2 \bar{\Omega}_3)$$

Ainda, se $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ é imediato que o sistema conserva energia (a hamiltoniana não é a energia!):

$$E = |\Omega_3|^2 + |\Omega_2|^2 + |\Omega_1|^2$$

Como mostraremos a seguir o sistema pode ser reduzido a quatro equações reais, logo a existência de três quantidades conservadas implica na integrabilidade das equações.

Usando representação das amplitudes complexas na forma polar

$$\Omega_1 = |\Omega_1| e^{-i\varphi_1}$$

$$\Omega_2 = |\Omega_2| e^{-i\varphi_2}$$

$$\Omega_3 = |\Omega_3| e^{-i\varphi_3}$$

(2)

Substituindo (2) em (1) reduzimos o sistema de três equações no plano complexo (seis equações reais) para quatro equações reais:

$$\frac{dB_1}{dt} = C_1 B_2 B_3 \cos\varphi$$

$$\frac{dB_2}{dt} = C_2 B_1 B_3 \cos\varphi$$

$$\frac{dB_3}{dt} = C_3 B_1 B_2 \cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = B_1 B_2 B_3 \left(\frac{C_1}{(B_1)^2} + \frac{C_2}{(B_2)^2} + \frac{C_3}{(B_3)^2} \right) \sin\varphi$$

Onde

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$$

$$E |\Omega_i| = B_i$$

Hamiltoniana nesta formulação se torna:

$$\mathcal{H} = B_1 B_2 B_3 \operatorname{sen} \varphi$$

Multiplicando a equação para B_i por B_i temos:

$$\frac{1}{C_1} \frac{d|B_1|^2}{dt} = \frac{1}{C_2} \frac{d|B_2|^2}{dt} = \frac{1}{C_3} \frac{d|B_3|^2}{dt} = B_1 B_2 B_3 \cos \varphi$$

A solução desta equação é dada em termos das funções elípticas de Jacobi, ver (Whittaker, 1937). Para simplificar a análise consideraremos um sistema com condição inicial $B_1(t = 0) = 0$. Então a solução para o quadrado das amplitudes é dada por

$$|B_1|^2 = |B_2(t = 0)|^2 \left| \frac{C_1}{C_2} \right| \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\tilde{u}}{m} \right)$$

$$|B_2|^2 = |B_2(t = 0)|^2 \operatorname{cn}^2 \left(\frac{\tilde{u}}{m} \right)$$

$$|B_3|^2 = |B_3(t = 0)|^2 \operatorname{dn}^2 \left(\frac{\tilde{u}}{m} \right)$$

Onde

$$\tilde{u} = B_3(t = 0) \sqrt{C_1 C_2} \varepsilon t$$

E parâmetro m das funções elípticas de Jacobi é dado por

$$m = \frac{C_3}{C_2} \left(\frac{B_2(0)}{B_3(0)} \right)^2$$

Em geral a equação dos tripletos apresenta soluções periódicas, exceto para condições iniciais degenerado, neste caso as funções elípticas de Jacobi apresentam “período” infinito.

Efeitos dissipativos

Os efeitos da dissipação aparecem nas equações nos termos envolvendo o laplaciano da vorticidade e da corrente magnética em (1a) e (1b). Escrevendo as equações levando em conta apenas efeitos difusivos temos:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 A}{\partial t} = \eta \nabla^2 (\nabla^2 A)$$

Para verificar o efeito da difusão assumiremos um campo contendo apenas um modo com número de onda

$$\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} = \Omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \vec{R}^\alpha(\vec{k})$$

Substituindo na expressão das equações de difusão temos:

$$-|\vec{k}|^2 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} (t) = \Omega |\vec{k}|^4 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \vec{R}^\alpha(\vec{k})$$

Que leva à

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} (t) = -|\vec{k}|^2 \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}$$

portanto

$$\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} (t) = \exp(-|\vec{k}|^2 D) \begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix} (0)$$

Onde

$$D = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$$

Colocando a dependência temporal de $\begin{pmatrix} \psi \\ A \end{pmatrix}$ em Ω de forma que

$$\Omega(T) = \Omega\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Pela regra da cadeia temos:

$$\frac{d\Omega(T)}{dt} = \frac{d\Omega(T)}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Omega(T)}{dT}$$

portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_A)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Omega}{dT} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \vec{R}^\alpha(\vec{k}) = -\Omega |\vec{k}|^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \vec{R}^\alpha(\vec{k})$$

então

$$\frac{d\Omega}{dT} \vec{R}^\alpha(\vec{k}) = -\varepsilon \Omega |\vec{k}|^2 \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \vec{R}^\alpha(\vec{k})$$

Fazendo o produto interno de ambos lados da equação por $\vec{R}^\alpha(\vec{k})$ e supondo este vetor normalizado temos:

$$\frac{d\Omega}{dT} = -\varepsilon \Omega |\vec{k}|^2 \langle D\vec{R}^\alpha(\vec{k}), \vec{R}^\alpha(\vec{k}) \rangle$$

onde

$$\sigma_{ij} = |\vec{k}|^2 \langle D\vec{R}^\alpha(\vec{k}_i), \vec{R}^\alpha(\vec{k}_j) \rangle$$

Será chamado de coeficiente de difusão.

Note que em geral ν e η tem valores diferentes, isto implica que o tensor de difusão σ_{ij} não será diagonal, com isto a difusão pode gerar uma interação linear entre diferentes modos. De forma geral a solução não apenas irá decair a zero como também pode gerar oscilações dependendo dos autovalores da matriz com entradas σ_{ij} .

Forçante térmica

Se incluirmos um termo devido a forçante térmica na equação de momento, considerando um gradiente radial de temperatura teremos

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + f\vec{u}^\perp = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0 \rho} \vec{b} \cdot \nabla \vec{b} + qT(x, y) \hat{t}$$

Onde \hat{t} é um versor na direção do gradiente de T

Então tomando o rotacional da última equação temos

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi + f)}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2\psi + f) = \frac{1}{\mu_0\rho} J(A, \nabla^2 A) + q \nabla^\perp(T(x, y)\hat{t})$$

seja

Consideremos a expansão em série de Fourier de $\frac{\partial T(x, y)}{\partial x}$

$$\nabla^\perp \widehat{T}(x, y) = \sum_l \hat{T}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{x})}$$

O coeficiente que representa uma força constante na componente de comprimento de onda \vec{k}_l é

$$F_l = \langle \vec{\hat{T}}_l, \vec{R}_l \rangle$$

$$\vec{\hat{T}}_l = \alpha q \begin{pmatrix} \hat{T}_l \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{R}_l$$

Efeito combinado de instabilidade devido ao campo básico, interações não lineares e dissipação.

Dado um campo composto por três ondas a equação diferencial ordinária geral que descreve a evolução das amplitudes é

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = C_{(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \Omega_2 \overline{\Omega_3} + \sum_{j=1}^3 \gamma_{1j} \Omega_j - \sum_{j=1}^3 \sigma_{1j} \Omega_j$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = C_{(\vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_1)}^{(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)} \Omega_1 \overline{\Omega_3} + \sum_{j=1}^3 \gamma_{2j} \Omega_j - \sum_{j=1}^3 \sigma_{2j} \Omega_j$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = C_{(\vec{k}_3, \vec{k}_1, \vec{k}_2)}^{(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)} \Omega_1 \overline{\Omega_2} + \sum_{j=1}^3 \gamma_{3j} \Omega_j - \sum_{j=1}^3 \sigma_{3j} \Omega_j$$

Apêndice ao capítulo 2:

Resumo do método da média sobre as ondas rápidas

Partiremos de um sistemas com um ditado por equações diferenciais envolvendo um parâmetro ϵ , e estaremos interessados no comportamento do sistemas no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Nos restringiremos à sistemas ditados por equações de evolução da forma:

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \epsilon^{-1} \mathcal{L}(u^\epsilon) + B(u^\epsilon, u^\epsilon) = 0$$

(A1)

Onde u^ϵ é um elemento do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{C}^2)$ das funções de quadrado integrável à valores em \mathbb{C}^2 , onde \mathbb{C} denota o corpo dos números complexos.

O operador $\mathcal{L}: L^2(\mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^2)$ será suposto anti-simétrico, ou seja, dado o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido em $L^2(\mathbb{R}^2)$ deve valer:

$$\langle \mathcal{L}u^\epsilon, v^\epsilon \rangle = -\langle v^\epsilon, \mathcal{L}u^\epsilon \rangle$$

$\forall u^\epsilon, v^\epsilon \in L^2(\mathbb{C}^2)$.

B é um operador não linear quadrático em u^ϵ .

Suponhamos que o problema depende de duas escalas temporais distintas de forma que podemos formalmente expandir as soluções da equação em potências do parâmetro ϵ :

$$u^\epsilon = u\left(t, \frac{t}{\epsilon}\right) = u^0\left(t, \tau = \frac{t}{\epsilon}\right) + \epsilon u^1\left(t, \tau = \frac{t}{\epsilon}\right) + \dots$$

(A2)

Onde serão descartados termos de ordem superior em ε .

Para que o método seja formalmente válido suporemos que u^1 tem crescimento sublinear em τ .

Substituindo-se o ansatz (2) na equação (1) obtemos para a ordem ε^{-1} :

$$\frac{\partial u^0}{\partial \tau} + \mathcal{L}(u^0) = 0 \tag{A3}$$

Cuja solução é dada por:

$$u^0(t, \tau) = e^{-\tau \mathcal{L}} \bar{u}(t) \tag{A4}$$

obtemos para a ordem ε^0 :

$$\frac{\partial u^1}{\partial \tau} + \mathcal{L}(u^1) = - \left(\frac{\partial u^0}{\partial t} + B(u^0, u^0) \right) \tag{A5}$$

Na qual podemos inserir (4), a solução é então dada pela equação de Duhamel (Trèves,1975):

$$e^{\tau \mathcal{L}} u^1 = u^1(t=0, \tau) - \tau \frac{\partial \bar{u}(t)}{\partial t} - \int_0^\tau B \left(e^{-s \mathcal{L}} \bar{u}(t), e^{-s \mathcal{L}} \bar{u}(t) \right) ds$$

Dividindo ambos da equação por τ e tomando o limite $\tau \rightarrow \infty$ e usando a condição de crescimento sublinear de u^1 temos:

$$\frac{\partial \bar{u}(t)}{\partial t} = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau B \left(e^{-s \mathcal{L}} \bar{u}(t), e^{-s \mathcal{L}} \bar{u}(t) \right) ds$$

Que é a equação obtida fazendo-se a média sobre as ondas rápidas.

Referências

- Arnold, V. I., *Mathematical Methods of classical mechanics*, Springer (1981)
- Arnold, V., *Geometrical Methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer (1988).
- Beck, C, Superstatistics, em "*Anomalous Transport: Foundations and Applications*" R. Klages, G. Radons, and I. M. Sokolov (Eds.), Wiley-VCH, Weinheim (2008).
- Brandenburg, A., & Subramanian, K.: 2005, ``Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory," *Phys. Rep.* **417**, 1-209
- Bustamante, M., Quinn, B. Robust energy transfer mechanism between non-resonant triads in nonlinear wave systems , *Archive Phys* 2013
- Burzlauff, Jürgen, Edel DeLoughry and Peter Lynch: Generation of zonal flow by resonant Rossby-Haurwitz wave interactions. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 102, 165-177 (2008).
- Bullard, E.C, Freedman, C, Gellman, H. and Nixon, J. (1950). The westward drift of the earth's magnetic field. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A243, 67-92.
- Cande, S. C. & Kent, D. V. , Revised calibration of the geomagnetic polarity time scale for the Late Cretaceous and Cenozoic. *J. Geophys. Res.* **100**, 6093-6095. (1995)
- Carbone, The clustering of polarity reversals of the geomagnetic field *Phys Rev Lett*.
- Charbonneau, P. Dynamo Models of the Solar Cycle, *Living Rev. Solar Phys.* 2 (2005), 2
- Chian A. C. L-, Lopes, S. , Abalde, J.R., Hamiltonian chaos in two coupled three-wave parametric interactions with quadratic nonlinearity, *Physica, D* 99 ,269-275 (1996)
- Frigo, E. , *Variações Geomagnéticas, Heliomagnéticas e do Fluxo de Raios Cósmiticos: Possíveis Consequências Climáticas na Região da América do Sul*, USP 2013.
- Chorin, A., Hald, O. Kupferman, R., Optimal prediction with memory, *Physica D* 166, pp. 239-257. (2002)
- Gillet, N., Jault, J., Canet, E. , Fournier, A., Fast torsional waves and strong magnetic field within the Earth's core, *Nature*, **465** (2010)
- Gilman, P.A., 2000, "Magnetohydrodynamic Shallow Water Equations for the Solar Tachocline", *Astrophys. J. Lett.*, 544, L79–L82.

Gissinger, C., A new deterministic model for chaotic reversals, *Euro. Phys. Journ. B*, 85, vol. 4 (2012).

Gissinger, C. Dormy, E., Fauve, S., Morphology of field reversals in turbulent dynamos *Euro. Phys. Lett.*, 90, 49001 (2010)

Grebert, Birkhoff normal form and Hamiltonian PDEs. Partial differential equations and applications, 1--46, *Sémin. Congr.*, 15, Soc. Math. France, Paris, (2007).

Guerrero, G. A. ; de Gouveia Dal Pino, E. M. . Flux-dominated solar dynamo model with a thin shear layer. *Astronomische Nachrichten*, v. 328, p. 1122-1125, 2007.

Hartmann, G., A Anomalia Magnética do Atlântico Sul: Causas e Efeitos, dissertação de metrado, USP, 2005.

Hide, R., 1966, Free hydromagnetic oscillations of the Earth's core and the theory of the geomagnetic secular variation, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Vol: A259, Pages: 615-647

Hoskins, B. J, Karoly, D.J., The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing, *J. Atmos. Sci.*, 38, 1179–1196. (1981)

Hoskins, B. J., and T. Ambrizzi: Rossby wave propagation on a realistic longitudinally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, 50, 1661–1671. (1993)

Hulot, G., Gallet, Y. , Do superchrons occur without any palaeomagnetic warning?, *Earth and Planetary Science Letters*, 210(1–2), 191–201 (2003).

Jager, C. Dahau, S., The variable solar dynamo and forecast of solar activity; influence on terrestrial surface temperature, Nova Science Publishers (2011)

Jones, M. N., Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory, John Wiley and Sons, 1985.

Kartashova, E. Nonlinear Resonance Analysis, Cambridge, 2011.

Leonhardt, R. , Fabian, K., Paelomagneti reconstruction of global geomagnetic field evolution during the Matuyama/Brunhes transition: iterative Bayesian inversion and independent verification, *Phys. Earth and Plan. Int.* 253, 172-195 (2007)

Lynch, P., On Resonant Rossby-Haurwitz triads. *Tellus*, 61A, 438-445 (2009)

MacGregor, K. B., & Charbonneau, P., *Astrophys. J*, 486, 484(1997).

Meiss, integrability of multiple three-wave interaction, *Phys. Rev. A.*, 19-4, 1780-1789,(1978).

Michelis, P., Tozzi, R., Meloni, A., Geomagnetic jerks: observation and theoretical modeling, *Mem. S.A.It.* Vol. 76, 957, 2005

Morrison, P. J. and Greene, J. M. , “Noncanonical Hamiltonian Density Formulation of Hydrodynamics and Ideal Magnetohydrodynamics,” *Physical Review Letters* **45**, 790–794 (1980); **48**, 569 (1982).

Ohno, M. and Hamano, Y, Geomagnetic poles over the past 10,000 years. *Geophys. Res. Lett.*, 19, 1715-1718. (1992).

Olson, P., Deguen, R., Hinnov, L.A., and Zhong, S., Controls on geomagnetic reversals and core evolution by mantle convection in the Phanerozoic, *Phys. Earth Planet. Sci.* 214, 87-103, 2013

Ossendrijver, M, Hoyng, P., Schmitt, D., The geodynamo as a bistable oscillator, *Geoph. And Astr. Fluid Dyn.*, 94, 263-314, 2001.

Parker, E., Hydromagnetic Dynamo Models , *Astrophys.J.* 122 (1955) 293

Pavlov, V. E. , Gallet, Y. , A third superchron during the Early Paleozoic , *Episodes*, Vol. 28, no. 2, 2005.

Raspopov, O.M., Dergachev, V.A., Kolström, T., 2004. Periodicity of climate conditions and solar variability derived from dendrochronological and other palaeoclimatic data in high latitudes. *Palaeogeography Palaeoclimatology Palaeoecology* 209, 127–139.

Romeiras, F.J., Integrability of double three wave interactions, *Physics Letters*, 93a (5), 227-229 (1982) .

Rossby, C.-G., 1939: Relations between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semipermanent centers of action. *J. Mar. Res.*, 2, 38-55.

Ryan DA, Sarson GR, The geodynamo as a low-dimensional deterministic system at the edge of chaos, *Europhysics Letters*, 2008, 83(4).

Silberman, I., Planetary waves in the atmosphere. *J. Meteorol.* 11,27–34.(1954)

Temam, R., *Infinite Dimensional dynamical systems in physics and mechanics*, Springer (1988).

Thomas, J.m, Weiss, N., *Sunspots and Starspots*, Cambridge U. Press (2008).

Usoskin, I.G., A History of Solar Activity over Millennia (2013), *Living Rev. Solar Phys.* 5 (2008), 3

Valet, J.-P., Meynadier L., Guyodo, Y., Geomagnetic field strength and reversal rate over the past 2 Million years, *Nature*, Vol 435, 802-805, 2005.

Valet, J., Fournier, A., Courtillot, V. and E. Herrero-Bervera, Dynamical similarity of geomagnetic field reversals, *Nature*, **490**, 89-93, 2012.

Weilard, 1977

Usoskin, I.G., A History of Solar Activity over Millennia (2013), *Living Rev. Solar Phys.* 5 (2008), 3

Salmon, R., *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*, Oxford (1998)

Yukutake, T. and H. Tachinaka, The westward drift of the geomagnetic secular variation, *Bull. Earthquake Res. Inst.*, 46, 1075–1102, 1968.

Zaqarashvili, T. V. Oliver, R. Ballester, J. L., Shergelashvili, B.M., Rossby waves in shallow water magnetohydrodynamics, *Astron & Astrophys.* no. 7382 (2007)

R. Zwanzig, Nonlinear generalized Langevin equations, *J. Statist. Phys.* 9 (1973) 215–220.