

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Fábio da Silva Bozolan

Uma Breve Introdução à
Lei de Atração Universal de Isaac Newton

São Paulo, 2015.

Fábio da Silva Bozolan

Uma Breve Introdução à Lei de Atração Universal de Isaac Newton

“Versão Corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade”.

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino.

Área de Concentração: Astronomia
Orientador: Prof. Dr. Claudemir R. Tossato

DEDICATÓRIA

Ao papai,
por ensinar-me três paradigmas, a saber,
que precisamos buscar a verdade (seja a filosófica, seja a científica) ainda que jamais a
alcancemos,
que devemos tentar aprender amar o próximo ainda que jamais o consigamos plenamente e
que o paradigma dois é superior ao paradigma um;

à Petru.
por ajudar-me a tentar viver o paradigma dois.

ao Vic,
Por lembrar-me que a vida pode ser bela e que,
mesmo dentro da trincheira, flores nascem.

AGRADECIMENTOS:

À Petru, pelo seu sorriso, pela sua paciência, por sua excelente capacidade de gerir os afazeres do dia a dia! Seu apoio foi fundamental para iniciar, desenvolver e finalizar este projeto;

À queridíssima Lídia Straus, Professora e Psiquiatra na UNICAMP, mas que, bem mais do que isto, tornou-se terapeuta e amiga, sempre pronta a desafiar-me a fazer ESCOLHAS e ensinar-me que PODEMOS mudar;

Aos professores Ademir, Amâncio, Enos, Elysandra e Roberto, por dois motivos: por terem apostado em minha proposta e pela alegria contagiante de estimular o saber!

Ao Profº Claudemir Roque Tossato, pela paciência, pela orientação e por proporcionar-me a segurança de que havia um Mentor cuidando para que houvesse alguma qualidade no meu trabalho;

Ao Profº Roberto de Andrade Martins por - além das aulas excelentes de Mecânica Geral I na graduação na Unicamp – sua generosidade em me ensinar como demonstrar a “fórmula” da aceleração centrípeta no estilo newtoniano;

Aos colegas Michel e Irineu, pelos bons momentos juntos, pelo sorriso, pela simpatia e pela camaradagem;

Aos funcionários do I.A.G.: Leandro da Biblioteca, sempre solícito, ao Thiago, ao Marcel e especialmente à Lilian, pela prontidão e eficiência;

Por último, mas não menos importante: ao povo que com seu suor gera a riqueza deste país proporcionando a gente como eu o privilégio de estudar numa Universidade Pública.

A equação de Newton para a gravitação universal fez mais que quantificar a atração entre objetos, fossem eles pedregulhos, espaçonaves ou planetas. Entre outras coisas, ela inspirou estudiosos de outros ramos – até da teoria política – a buscar leis universais matemáticas e descritivas. Se o teorema de Pitágoras é uma prova que nos mostra o que é uma Prova, a equação de Newton para a gravitação universal é uma lei que nos mostra o que é uma Lei. Ao fazer isso, ela não apenas modificou nosso entendimento sobre a natureza, mas também nossas concepções sobre ciência e a vida.

Robert P. Crease

A natureza e as leis da natureza estavam imersas em trevas;
Deus disse "Haja Newton" e tudo se iluminou

Alexander Poppe

No princípio... a terra estava vazia e vaga, as trevas cobriam o abismo...
Deus disse “Haja luz” e houve luz. Deus viu que a luz era boa...
Deus disse: façamos o homem à nossa semelhança...
Deus viu tudo o que tinha feito: e era *muito* bom.

Gênesis

RESUMO

A lei de atração gravitacional enunciada por Isaac Newton em seus *Principia* em 1684 tem atrás de si um processo longo de reflexão e diálogo com outros autores. Este texto intenciona introduzir de modo breve alguns fatos de tal processo, destacando não apenas o processo em si – que envolveu modelagem matemática – mas também alguns fatos colaterais como o desenvolvimento da expressão quantitativa da aceleração centrípeta e o intercâmbio de ideias entre Newton e outros pensadores. O texto foi escrito em quatro capítulos e três apêndices. No primeiro capítulo o “formato postulacional” do texto dos *Philosophiae naturalis principia mathematica* é apresentado; no segundo capítulo são destacados oito argumentos newtonianos para deduzir a Lei de Atração Gravitacional; no terceiro capítulo destacamos o processo de “matematização” desenvolvido por Newton; no quarto capítulo discutimos a relevância da discussão comunitária entre cientistas para o progresso da ciência. O apêndice um mostra uma dedução “ao estilo newtoniano” da intensidade da força centrípeta; o apêndice dois mostra a relação da intensidade em função da distância a partir da irradiação da luz e o apêndice três é a dedução da Lei Harmônica de Kepler a partir da Lei de Atração Gravitacional de Newton.

Palavras-chave: Isaac Newton, Força Gravitacional, Força Centrípeta

ABSTRACT

Newton's law of universal gravitation stated in his Principia (1684) is the result of a long process of reflection and dialogue between Newton and other authors. This text intends to introduce briefly some facts of such a process, highlighting not only the process itself - which involved mathematical modeling - but also some side events such as the development of the quantitative expression of the centripetal acceleration and the exchange of ideas between Newton and other thinkers. The text is composed by four chapters and three appendices. The first chapter presents the "Postulational Format" of the *Philosophiae naturalis principia mathematica*; the second chapter highlights eight Newtonian arguments to deduce Newton's law of universal gravitation; in the third chapter, we emphasize the process of "mathematization" developed by Newton; in the fourth chapter, we state the importance of existing a discussion group among the scientists for the advancement of science. The appendix one presents a deduction, following the "Newtonian Style", of the intensity of the centripetal force; the Appendix two shows the relative intensity depending on the distance from the radiation of light; and the Appendix Three is the deduction of Kepler's laws of planetary motion from the Newton's law of universal gravitation.

Key Words: Isaac Newton, Gravitational Attraction, Centripetal Force

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
I. A ESTRUTURA DA ARGUMENTAÇÃO NOS <i>PRINCIPIA</i>	11
II. A LEI DE ATRAÇÃO UNIVERSAL	18
III. MATEMATIZAÇÃO E INTELIGIBILIDADE	39
IV. O AMBIENTE COMUNITÁRIO NA PRODUÇÃO CIENTÍFICA.....	46
Apêndice 1: Dedução da intensidade da força centrípeta em Newton.....	60
Apêndice 2: Intensidade proporcional ao inverso do quadrado da distância.....	66
Apêndice 3: Dedução da Lei Harmônica de Kepler a partir da Lei de Atração Universal de Newton	68
BIBLIOGRAFIA	70

INTRODUÇÃO

Este texto é o produto final de meu Mestrado Profissional em Ensino de Astronomia pelo Instituto de Astronomia e Geofísica da Universidade de São Paulo. Motivado pelo fato de que a maioria dos livros de Ensino Médio no Brasil não mostra como Newton teria encontrado a Lei de Atração Universal, esse texto foi escrito tendo como público alvo alunos que tenham concluído a primeira série do Ensino Médio.

Alguns lembretes ao leitor: esse texto não foi resultado de um Mestrado Acadêmico, mas de um Mestrado Profissional. Sua intenção é expor de modo mais cuidadoso para alunos de Ensino Médio o processo de descoberta da Lei de Atração Gravitacional. Expor de modo “mais cuidadoso” não significa expor de maneira exaustiva. Talvez esse houvesse sido o resultado de um Mestrado Acadêmico. Procurei não emitir opiniões pessoais e não perder de vista a discussão de especialistas em filosofia e história da ciência a respeito da evolução do pensamento newtoniano. Norteei a produção desse texto por três tipos de autores: filósofos e historiadores da ciência conhecidos mundialmente, como John William Jamieson Herivel, I. Bernard Cohen, Richard S. Westfall; autores da literatura conhecida como “divulgação científica”, como Ian Stewart ou Robert P. Crease; e, finalmente, e, mais importante, filósofos e historiadores da Ciência no Brasil (como Claudemir Roque Tossato, Eduardo Salles de Oliveira Barra e Roberto de Andrade Martins), que me permitiram ler com mais facilidade aqueles especialistas citados no primeiro grupo. Ao longo do texto, indiquei através de notas de rodapé em que obras o leitor poderá encontrar o fundamento para as afirmações que fiz, com a intenção de que o leitor possa verificar por si só a linha argumentativa que construí aqui. Aqui cabe uma ênfase ao leitor: este texto deve ser lido com um “espírito de dúvida”. Sinceramente, desejamos que o leitor, ao acompanhar o seu fluxo, não perca de vista a expressão “breve introdução”, que aparece no título “Uma breve introdução à Lei de Atração Universal de Isaac Newton”, pois desejamos que o leitor tente posteriormente ler os autores citados para verificar “por si mesmo” o que aqui leu.

Um desejo aqui foi escrever de modo gradativo. No capítulo 1 procurei mostrar a estrutura do argumento de Newton, semelhante aos textos de matemática, que encadeiam os argumentos desde os mais simples até os mais complexos, numa rede de conexões inteligentemente construídas. Assim, intencionei que o leitor, primeiramente, entendesse a estrutura do argumento newtoniano e, em seguida no capítulo 2, o próprio argumento, exposto em “doses homeopáticas” para facilitar a compreensão. Dentre os vários teoremas do Livro III

dos *Principia* que poderiam ser citados no capítulo 2, escolhi citar apenas aqueles que julguei fundamentais, em detrimento dos demais, que totalizam os trinta e três teoremas do mesmo volume. O terceiro capítulo intencionei destacar um dos legados da obra de Newton: uma maior compreensão da natureza na medida em que ela foi expressa quantitativamente. Ali, procurei mostrar que Newton se torna excelente porta voz de uma convicção lentamente construída antes dele e que, em sua obra, ganha destaque gigantesco: a convicção de que leis naturais são leis matemáticas. O último capítulo deseja ser um capítulo de “provocações” ao leitor, na medida em que procurei expor brevemente questões em torno da produção intelectual pela comunidade científica tomando a Lei de Atração Universal como exemplo. No capítulo 4 proponho ao leitor que a obra de Isaac Newton só pode ser adequadamente compreendida e admirada se for pensada como uma obra construída dentro das relações humanas. Se o leitor, ao final da leitura tiver compreendido um pouco melhor como uma Lei tão fundamental na história humana foi encontrada, e, se houver percebido, com esse exemplo, a importância do ambiente comunitário para se construir a ciência, teremos logrado sucesso.

I. A ESTRUTURA DA ARGUMENTAÇÃO NOS *PRINCIPIA*

Isaac Newton escreveu muito. Em sua tese de doutorado, o Prof. Eduardo Barra elenca¹ vinte e três escritos de Newton, entre manuscritos e obras, sendo que quinze deles foram produzidos antes da publicação de seu trabalho mais conhecido, os *Principia*². Neste trabalho daremos muita atenção a esta última e, portanto, vale aqui dizer algo sobre a sua organização.

A obra toda é dividida em três volumes chamados por Newton de Livros I, II e III. Em português, podemos encontrar estes dois últimos volumes impressos juntos, enquanto o Livro I aparecerá impresso sozinho. As referências na bibliografia final indicam tais obras. Se no Livro I, o autor investigou matematicamente o “movimento dos corpos”, no Livro II, ele fará o mesmo, mas acrescentando à discussão do movimento a resistência oferecida a eles pelos meios nos quais os corpos tentam se mover. Sempre orientado por uma descrição matemática dos fenômenos, Newton não deixará de dar destaque a conclusões sobre a natureza que indiquem a validade da descrição matemática. Finalmente, de posse da descrição matemática do movimento, Newton estenderá sua investigação para os corpos celestes, concluindo, assim, que as leis que regem seus movimentos são as mesmas que regem os movimentos de corpos “terrenos”: é nesse contexto que ele mostrará a universalidade, isto é, a validade para os corpos terrestres e os corpos celestes da Lei de Atração Universal.

Na abertura do Livro III dos *Principia*, Newton escreveu:

"Nos livros precedentes estabeleci os princípios de filosofia, não princípios filosóficos, mas matemáticos, isto é, tais que possamos basear nossos raciocínios em investigações filosóficas. Estes princípios são leis e condições de certos movimentos, e poderes ou forças, que dizem respeito principalmente à filosofia. Para evitar que parecessem secos e estéreis, illustrei-os aqui e ali com alguns escólios filosóficos, explicando coisas que são de uma natureza mais geral e sobre as quais parece apoiar-se principalmente a filosofia, como a densidade e resistência dos corpos, espaços vazios de todos os corpos, e o movimento da lua e dos sons. Falta demonstrar a partir dos mesmos princípios a estrutura do Sistema do Mundo. Sobre este assunto compus, de fato, o terceiro livro num método popular tal que ele pudesse ser lido por muitos. Mas depois, considerando que aqueles que não tivessem sido introduzidos suficientemente nos princípios não poderiam discernir facilmente a força das consequências, nem deixar de lado os preconceitos a que estavam acostumados por anos, a fim de prevenir as disputas que poderiam surgir sobre estas coisas, optei por reduzir a substância deste livro à forma de Proposições (de maneira matemática), que devem ser lidas apenas por aqueles que dominaram os princípios estabelecidos nos livros precedentes. Não que aconselhe qualquer um ao estudo prévio de toda Proposição desses livros, pois elas são tantas que isto poderia levar

¹ BARRA, 1994, p. 184.

² O título completo é “*Philosophiae naturalis principia mathematica*” que, traduzido em português é “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”.

muito tempo, mesmo para leitores de boa formação matemática. É suficiente que se leia cuidadosamente as Definições, as Leis do Movimento e as primeiras três seções do primeiro Livro. Pode-se então passar para este livro e consultar as Proposições remanescentes dos dois primeiros livros à medida em que as referências neste livro e suas razões assim o exigirem”.³

Uma versão primitiva do Livro III, escrita por Newton em latim, foi impressa após a sua morte sob o nome *De Mundi Systemate*, e também impressa em Inglês sob o título *On the system of the world*. Esse texto apresenta uma argumentação em forma de prosa, o que torna a leitura mais natural para quem não está habituado ao “formato postulacional” do Livro III; a tradução dessa obra para o português aparece em NEWTON, 2008.

Na intenção de expor o pensamento de Newton, citaremos excertos, ora do Livro III⁴, ora do manuscrito *De Mundi Systemate*⁵.

I.I A forma da argumentação

Howard Eves identifica como “forma postulacional” o formato com o qual Newton escreve o Livro III dos *Principia*. Tal formato é semelhante à forma que Euclides usou ao redigir seus “Elementos”⁶, um estilo muito comum atualmente de escrever em textos de Matemática. Tal forma de argumentar, através de demonstrações, combina definições, postulados e/ou⁷ axiomas, teoremas, lemas e corolários. Ao escrever os *Principia*, Newton escolheu usar as seguintes expressões: hipótese, “regra”⁸, lei, teorema, lema, escólio e, como se pode notar no título, o vocábulo “princípio”. Certamente, aqui cabe tentar definir alguns termos para tornar a leitura seguinte mais compreensível. Vejamos:

“Axioma” expressa uma ideia primitiva, indemonstrável, “natural e facilmente” evidente, ou ainda “auto evidente”; um dicionário de filosofia nos diz:

“proposição evidente em si mesma e indemonstrável ou pressuposto em um sistema, ocorrendo sempre como premissa ou como ponto de partida para a demonstração de algo. Na exposição de um sistema... um axioma é uma proposição de partida, indemonstrável, mas que decidimos considerar como verdadeira porque parece ser evidente.”⁹

³ NEWTON, 2008, pp. 183-184.

⁴ Traduzido pelo Profº André Koch Torres Assis. Veja referência NEWTON, 2008, pp. 9 e 181.

⁵ Traduzido por Fábio Duarte July. Veja referência NEWTON, 2008, p. 333.

⁶ Há uma versão em português, impressa pela Editora da UNESP, traduzida e comentada pelo Profº Irineu Bicudo.

⁷ “e/ou”, pois para alguns há distinção e para outros não. Para ampliar a discussão, leia EVES, 2004 a partir do 3º parágrafo da p. 179 e verifique em COMTE-SPONVILLE, 2003 os vocábulos “axioma” e “postulado”.

⁸ NEWTON, 2008, p. 185.

⁹ JUIASSÚ & MARCONDES, 2001.

O axioma é nomeado, às vezes, “postulado” ou “princípio”¹⁰. O que é “postulado”? É semelhante a “pressuposto”. Mais uma vez o dicionário:

“proposição cuja verdade se pressupõe para a demonstração de outras proposições e para a construção de um sistema hipotético-dedutivo. Proposição que não é evidente nem demonstrável e que, no entanto, deve ser admitida como válida por servir de ponto de partida de um sistema teórico. Reconhece-se assim que nenhum sistema pode conter em si apenas verdades demonstradas, ou seja, pode partir de uma certeza absoluta. O próprio princípio da demonstração seria indemonstrável...”¹¹.

“Teorema” é uma proposição, uma afirmação, um enunciado que foi deduzido logicamente de uma primeira proposição (ou algumas proposições iniciais); a diferença de “teorema” e “axioma” está no fato de que o axioma é um enunciado “sem demonstração”, isto é, não há enunciados anteriores dos quais o axioma foi deduzido.

“Lema” é o mesmo que teorema, mas com um detalhe: o “lema” é um enunciado de “menor importância”, pois ele está posicionado entre um axioma e um teorema na cadeia de argumentação, ou entre dois teoremas. Normalmente o “teorema” tem alguma aplicação notável, enquanto a utilidade do “lema” é servir de “caminho” para um teorema. É comum usar “lemas” para subdividir uma demonstração, de modo que fique mais fácil acompanhar o argumento.

“Corolário” é o mesmo que “consequência”, enquanto “escólio” é o mesmo que “comentário”; Newton usa muito esse recurso com a intenção de facilitar a compreensão de seus leitores ao tomarem contato com as demonstrações nos *Principia*: a intenção é tornar o texto mais didático.

Independentemente das linhas anteriores, há três aspectos aqui que destacaremos.

Primeiro, sugerimos encarar esta forma de escrever - “forma postulacional” - como um trinômio “início/meio/fim”, ou seja, com “afirmações iniciais/afirmações intermediárias/afirmações finais”. De modo geral, ao escrever em tal formato, o autor, essencialmente, parte de afirmações básicas e, através de argumentação, encontra outras conclusões, pois, independentemente do significado exato dos termos “axioma”, “princípio”, “teorema”, “lema”

¹⁰ Princípio: “lei geral que explica o funcionamento da natureza, e da qual leis mais específicas podem ser consideradas particulares” (JUÍASSÚ & MARCONDES, 2001). Ou ainda por André Comte-Sponville: “um começo teórico: o ponto de partida de um raciocínio. É da natureza de um princípio ser indemonstrável (senão já não seria um princípio, e sim um teorema ou uma lei), como é da natureza da demonstração requerer algum princípio indemonstrado. A diferença em relação a um axioma ou um postulado? É que estes são utilizados apenas para sistemas formais ou hipotético-dedutivos. Um princípio é utilizado tanto para o caso das ciências experimentais, como da moral ou da política...” COMTE-SPONVILLE, 2003.

¹¹ COMTE-SPONVILLE, 2003.

etc, é possível perceber, na forma postulacional, três tipos de afirmações encadeadas: afirmações “primitivas” que não são demonstráveis - apenas aceitas-, afirmações que mostram conclusões inteligentemente necessárias e afirmações intermediárias que conectam as demais. Cabe aqui citar Howard Eves:

Apesar da grande importância do conteúdo dos Elementos, talvez mais importante ainda seja a maneira formal como se apresenta esse conteúdo. De fato, os Elementos de Euclides tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna.

Certamente um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma postulacional de raciocínio. A fim de se estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas sucessivamente e assim por diante. Como a cadeia não pode recuar indefinidamente, deve-se, ao início, aceitar um corpo finito de afirmações não demonstradas para evitar imperdoáveis círculos viciosos consistindo em provar uma afirmação A a partir de uma afirmação B e depois fazer o contrário. Essas afirmações assumidas inicialmente se denominam postulados ou axiomas do discurso e delas devem decorrer todas as demais afirmações do discurso. Quando se arranjam dessa maneira as afirmações de um discurso diz-se que ele se apresenta na forma postulacional.

Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal dos Elementos de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa...¹²

O segundo aspecto a ser destacado aqui é o fato de que o encadeamento de tais afirmações precisa ser inteligente, ou, dito de outro modo, precisa ser uma “demonstração”. Gelson Iezzi afirma que todo teorema é uma implicação da forma “hipótese $\Rightarrow$ tese”, de modo que “demonstrar um teorema” significa mostrar que não é possível que uma tese seja falsa se a hipótese é verdadeira ou, ainda: se a hipótese é verdadeira, necessariamente sua tese também é¹³. Damos a ideia de demonstração com um exemplo simples:

Chamamos aos seres que mamam de “mamíferos”. Homens mamam. Logo, homens são mamíferos.

Poderíamos escrever o argumento acima de outras maneiras, tais como:

Classificamos os seres que mamam com o rótulo “mamíferos”.

Os homens mamam.

Os homens são mamíferos.

¹² EVES, 2004, p. 179.

¹³ IEZZI & MURAKAMIM 1992, p. 10-A.

Ou, ainda:

Nomeamos “mamíferos” os seres que mamam, e homens mamam; então, homens são mamíferos.

Podemos identificar nesse exemplo três afirmações – ou “proposições” – a saber:

Proposição A: seres que mamam são denominados “mamíferos”.

Proposição B: homens mamam

Proposição C: homens são mamíferos

Desse modo, podemos dizer que se as afirmações A e B são verdadeiras então, necessariamente, a afirmação C também é, ou, a afirmação C deve ser conclusão das afirmações A e B. Com a maneira simbólica como os matemáticos escrevem, a linha anterior fica assim:

$$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} \Rightarrow C$$

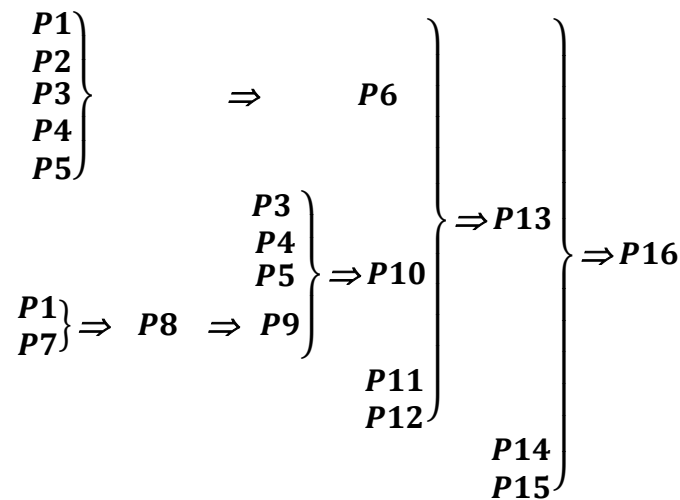
O símbolo “ $\Rightarrow$ ”¹⁴ é chamado de “se/então” ou “implica”. Escrever como o fizemos acima é um modo sintético de expressar as ideias escritas por extenso. Ao ler o esquema anterior, um filósofo ou matemático lerá “Se A é verdade, e se B é verdade, então, C é verdade” ou ainda poderá ler “As afirmações A e B implicam a afirmação C”, que é um modo curto de expressar a mesma ideia exposta no período “Nomeamos “mamíferos” os seres que mamam, e homens mamam; então homens são mamíferos”.

Vejamos um exemplo extraído dos *Principia*. Se, diferentemente de Aristóteles¹⁵, identificarmos as proposições (afirmações) com a letra P e um número cardinal, então, escreveremos proposição P1 no lugar de proposição A, proposição P2 no lugar de proposição B, proposição P3 no lugar de proposição C, e assim sucessivamente. Optando por tal modo de

¹⁴ Não confunda o símbolo de “uma seta e um traço” com o símbolo construído com “uma seta com dois traços” Enquanto este deve ser lido como “se/então” aquele deve ser lido como “tende a”.

¹⁵ DIEUDONNÉ, 1990, p. 47, terceira nota.

escrever, podemos esquematizar a argumentação do 4º teorema¹⁶ do Livro III com o seguinte esquema:



Resta-nos falar sobre o terceiro aspecto que prometemos destacar. No exemplo anterior, aparecem - veremos adiante - quatro “afirmações primitivas”: enquanto duas são afirmações filosóficas, outras duas são fatos observáveis na natureza, ou fenômenos. Aqui, convém chamar a atenção para o vocábulo “fenômeno”¹⁷ e enfatizar a semelhança e diferença do trabalho de Newton com relação à Matemática Pura. Se, por um lado, a forma que Newton utiliza para escrever seus *Principia* é o mesmo estilo dos matemáticos, por outro lado, parte de suas “afirmações primitivas” são afirmações sobre a Natureza, ou o modo como a Natureza é ou funciona: a palavra “fenômeno” vem do grego *phainómenon*, cuja tradução literal é “coisa que aparece” ou “aquilo que aparece” ou, ainda, “aquilo que se vê”; assim, chamam-se de fenômenos eventos observáveis na natureza, característica desnecessária em Matemática. O terceiro aspecto que destacamos é uma definição de “lei científica”:

“aquela que estabelece, entre os fatos, relações mensuráveis, universais e necessárias, permitindo que se realizem previsões. As leis científicas têm uma formulação geral, sendo... frequentemente de caráter dedutivo... têm sempre um caráter hipotético: dadas tais condições, tal resultado será obtido...”¹⁸.

¹⁶ NEWTON, 2008, p. 197: “Que a lua gravita em direção à Terra e que é desviada continuamente de um movimento retilíneo e mantida em sua órbita pela força da gravidade”.

¹⁷ NEWTON, 2008, p. 189.

¹⁸ JUIASSÚ & MARCONDES, 2001, p. 160.

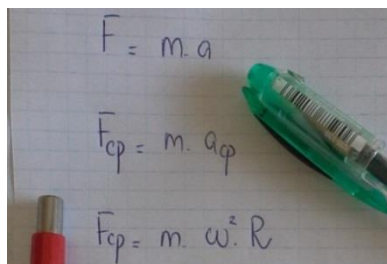
A Lei de Atração Universal que Newton encontra é uma Lei da natureza, o que necessariamente implica previsibilidade. Matematicamente descrita, as previsões oriundas da Lei de Atração Universal de Newton funcionam como meio de verificar sua validade. A descoberta por Newton dessa tão famosa lei permitiu criar um círculo retroalimentado de previsão/confirmação, que garantiria a pertinência da lei a cada fenômeno previsto e em seguida confirmado¹⁹. Nos *Principia*, Newton dedicará muitas páginas mostrando uma série de exemplos desse tipo. Seu esquema de pensamento é norteado por dois paradigmas: criar generalizações através do pensamento indutivo e enunciar uma “lei natural” ao matematizar tais generalizações. Um exemplo importante dessa característica nos *Principia* é comentado no item identificado como “aspecto 8”, do capítulo 2.

¹⁹ Veja o apêndice 3.

II. A LEI DE ATRAÇÃO UNIVERSAL

Neste capítulo, tentaremos esboçar parte do trabalho de Newton em sua busca pela Lei de Atração Universal. Para apreciar melhor seu feito e valorizar seu trabalho, indicamos, primeiramente, um modo²⁰ aparentemente “genial” de deduzir a famosa lei. Somente depois, esboçaremos parte de sua obra destacando oito aspectos de sua argumentação.

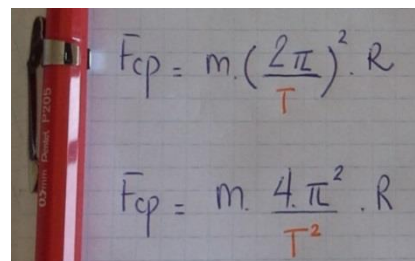
Vejamos a dedução “genial”: imaginemos uma estrela de massa “M”, orbitada por um planeta de massa “m”, num movimento circular uniforme com raio “R”. Tal planeta apresenta a tendência de manter seu movimento na linha tangente a cada ponto da trajetória circular percorrida por ele ao redor de seu sol. A atração provocada sobre o planeta por essa estrela atua como força resultante centrípeta “ F_{cp} ”. Assim, podemos escrever para o planeta de massa “m” a segunda lei da Dinâmica, e escrever sua aceleração em função de sua velocidade angular “ ω ” e o raio “R” da trajetória do planeta; na sequência, escrevemos a velocidade angular “ ω ” em função do intervalo de tempo de uma volta completa, que chamamos de período “T”.



$$F = m \cdot a$$

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp}$$

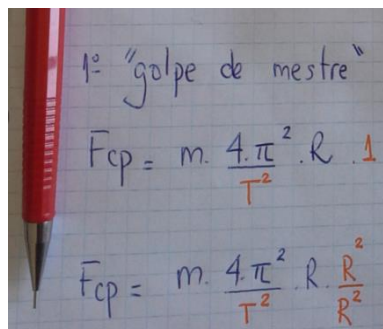
$$F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$



$$F_{cp} = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R$$

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R$$

O próximo “movimento” seria um “movimento genial”, ou uma “tacada de mestre”. “Antevendo” o final do raciocínio, multiplicamos o resultado anterior pelo número “um” e, na sequência, reescrevemos o número “um” como a razão $\frac{R^2}{R^2}$ como segue:



1º “golpe de mestre”

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R \cdot 1$$

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R \cdot \frac{R^2}{R^2}$$

²⁰ Veja COHEN, 1967, páginas 179 a 184.

O movimento anterior foi feito pensando no movimento seguinte, no qual (numa “segunda tacada de mestre”) re-arranjamos os termos de modo que possamos reescrever o último resultado fazendo ficar explícito nele a constante de Kepler em sua lei harmônica, a saber, $k = \frac{R^3}{T^2}$:

$$F_{cp} = \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot \frac{R^3}{R^2} \quad 2^\circ \text{ "tacada de mestre"}$$

$$F_{cp} = \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2}{R^2} \cdot \frac{R^3}{T^2}$$

De Kepler aprendemos que $\frac{R^3}{T^2} = k$, e podemos reescrever a linha anterior do seguinte modo:

$$F_{cp} = \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2}{R^2} \cdot K$$

$$F_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot K}{R^2} \cdot m$$

Reescrevemos os termos de modo que possamos “fazer aparecer”, num terceiro e último “movimento genial”, a massa da estrela “M”, ao redor de quem o planeta de massa “m” orbita: multiplicamos a igualdade pelo número “um” e reescrevemos tal número como a razão $\frac{M}{M}$.

3ª tacada de mestre

$$F_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot K}{R^2} \cdot m \cdot 1$$

$$F_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot K}{R^2} \cdot m \cdot \frac{M}{M}$$

Finalmente, reescrevemos o último resultado, de maneira a isolar as massas no numerador e o quadrado da distância entre o planeta e seu sol no denominador. Notemos que a parcela $\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k}{M^2}$ é um valor constante, pois “k” é a constante da terceira lei de Kepler e “M” é a massa da estrela em torno de quem o planeta orbita; podemos, então, reescrever $\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k}{M^2} = \text{constante } G$.

$$F_{cp} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot K}{M} \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

mas $\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot K}{M} = G$, então

$$F_{cp} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

Ora, essa demonstração é bastante estranha por vários motivos. Um deles é que ela está restrita à interação entre duas massas de astros, em que um circunda o outro, o que está bastante longe de demonstrar que duas massas quaisquer, como duas pedras, interagem pela mesma expressão. Mas, o problema maior é que tal demonstração é “sobre-humana”, no

sentido em que nenhuma pessoa, por mais inteligente que fosse, poderia escrever de tal maneira sem que soubesse de antemão o resultado final. Dito de outra maneira: tal demonstração é logicamente coerente, mas equivocada historicamente. Ela jamais teria sido feita por alguém que buscasse encontrar a Lei de Gravitacional Universal, se ainda não a conhecesse!

Em contraste com a “demonstração” anterior, mostraremos que Newton lentamente caracteriza a força de atração universal. Para fazê-lo, é necessário demonstrar ao menos oito aspectos de seu argumento. Primeiro: Há uma força sobre os astros que os obriga a executar o movimento curvilíneo. Segundo: Tal força apresenta intensidade inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o centro do astro circundante e o astro circundado. Terceiro: A força atuante na queda livre dos corpos e a força que atua sobre os astros em movimento curvilíneo é a mesma. Quarto: Essa força é típica de todos os corpos com massa, sejam pequenos como um grão de poeira ou grandes como um astro. Quinto: Essa força tem intensidade proporcional à massa do corpo atraído. Sexto: Essa força é uma força de ação e reação. Sétimo: É possível estudar tal força tomando os corpos como pontos materiais. Oitavo: Queda livre e órbita curvilínea lunar são um único fenômeno, afirmação verificável através de dados experimentais.

Antes que iniciemos a análise dos oito itens, destacamos aqui a Lei da Inércia²¹; ela está pressuposta ao longo de todo o Livro III, e será usada por Newton, além de outros resultados - como as segunda e terceira Leis da Dinâmica - formulados por ele nos Livros I e II. O eixo principal de nossa análise acontecerá a partir dos sete primeiros teoremas do Livro III. Transcreveremos esses teoremas, à medida que os usarmos para a discussão. Além de tal destaque, cabe um aviso ao leitor: até que cheguemos ao sétimo aspecto, trataremos todos os corpos citados como “pontos materiais”; a justificativa para isso aparecerá exatamente no sétimo item da argumentação newtoniana a ser analisado. Dito isso, vejamos, ponto a ponto, os oito itens que citamos.

Aspecto 1.

É relevante levar em conta que o que chamamos atualmente de “satélite” é chamado por Newton de “planeta” e o que hoje chamamos de “planeta”, Newton o chama de “planeta primário”. Assim, Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno seriam “planetas

²¹ Ou terceira lei do movimento como em NEWTON, 2002, p. 53.

primários”, enquanto os satélites de Júpiter e de Saturno seriam “planetas” que orbitam ao redor de seus respectivos “planetas primários”.

TEOREMA 1: Que as forças com que os planetas que circundam Júpiter são continuamente desviados dos movimentos retilíneos e mantidos em suas próprias órbitas tendem ao centro de Júpiter e são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias dos lugares destes planetas em relação a este centro.²²

Sobre que forças Newton fala? Sobre as forças que desviam os satélites de suas trajetórias retilíneas e os mantêm em trajetória circular. Qual a conclusão? Tais forças são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias dos lugares desses planetas em relação a esse centro.

TEOREMA 2: Que as forças com que os planetas primários são continuamente desviados dos movimentos retilíneos e mantidos em suas próprias órbitas tendem ao sol e são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias dos lugares destes planetas ao sol.²³

Notemos que o Teorema 2 faz afirmação semelhante à do Teorema 1, mas coloca o Sol no centro e os planetas orbitando ao seu redor, enquanto no Teorema 1 quem está no centro é Júpiter (ou Saturno, enfim, um planeta) e quem orbita ao redor do centro é um satélite. Assim, tal qual um satélite orbita ao redor de um planeta, também um planeta orbita ao redor do Sol. Tanto um como outro - isto é, o satélite girando ao redor de seu planeta e o planeta girando ao redor do sol - são desviados de suas respectivas trajetórias retilíneas, e o são por uma força que aponta para o centro do movimento. Newton sugere que há um padrão nos céus: se o astro A orbita ao redor do astro B (que é o centro da órbita curvilínea), há uma força que o obriga a isso. Enfatizamos: no Teorema 1, o astro A é um satélite que orbita ao redor do astro B, um planeta; no Teorema 2, o astro A é um planeta que orbita ao redor do astro B, o Sol.

A análise anterior é estendida também à Lua, o satélite da Terra, em sua relação com nosso planeta; isso é feito nos Teorema 4 e 3; neste, lemos “... a força com que a Lua é mantida em sua órbita tende para a Terra...”, enquanto naquele Newton escreveu: “... a Lua... é desviada continuamente de um movimento retilíneo e mantida em sua órbita pela força da gravidade”. Os enunciados completos desses teoremas constam a seguir:

²² NEWTON 2008, p. 195.

²³ Idem.

TEOREMA 3: Que a força com que a lua é mantida em sua órbita tende para a terra e é inversamente proporcional ao quadrado da distância de seu lugar ao centro da terra.²⁴

TEOREMA 4: Que a lua gravita em direção à terra e que é desviada continuamente de um movimento retilíneo e mantida em sua órbita pela força da gravidade.²⁵

O raciocínio é: sendo a órbita lunar curvilínea, deve haver uma força que a mantém em tal condição, ou, o que é dizer o mesmo, deve haver uma força que a faça escapar da tendência natural de se mover em linha reta. Assim, até aqui, é possível perceber na argumentação newtoniana que há algo em comum nos binômios “Sol-planeta”, “Terra-Lua”, “Júpiter-satélite”, “Saturno-satélite”: em todas essas combinações, deve haver uma força que, apontando para o centro da órbita curvilínea, obriga o astro circundante a desviar de sua trajetória “natural” (que é uma trajetória retilínea), isto é, sua tendência natural de mover-se numa linha reta. A extensão do argumento para as relações Mercúrio-Sol, Vênus-Sol e Terra-Sol aparece no trecho do Teorema 5, onde lemos “... os que circundam o Sol em direção ao Sol...” imediatamente após as relações Júpiter-Sol e Saturno-Sol, de modo a equalizar as relações dos demais planetas conhecidos (Marte, Vênus e Terra) com o Sol. Eis o teorema e o respectivo trecho destacado:

TEOREMA 5: Que os planetas que circundam Júpiter gravitam em direção a Júpiter, os que circundam Saturno em direção a Saturno, *os que circundam o sol em direção ao sol*, sendo desviados dos movimentos retilíneos e mantidos em suas órbitas pelas forças de suas gravidades.²⁶

Tomados os Teoremas 2, 3 e 5, mostramos o primeiro aspecto que citamos e, esquematicamente, podemos ilustrar o raciocínio assim:

<i>Há uma força sobre Saturno apontando para o Sol</i> <i>Há uma força sobre Júpiter apontando para o Sol</i> <i>Há uma força sobre a Terra apontando para o Sol</i> <i>Há uma força sobre Vênus apontando para o Sol</i> <i>Há uma força sobre Mercúrio apontando para o Sol</i> <i>Há uma força sobre os satélites jovianos apontando para o Júpiter</i> <i>Há uma força sobre os satélites saturniano apontando para Saturno</i> <i>Há uma força sobre a Lua apontando para a Terra</i>	}	⇒	<i>Há uma força radial</i> <i>apontando para o centro</i> <i>sobre astros em movimento curvo</i>
--	---	---	---

²⁴ NEWTON 2008, p. 196.

²⁵ Ibidem, p. 197.

²⁶ Ibidem, p. 199.

Aspecto 2.

Newton vai mais além da percepção de que se o astro A orbita ao redor do astro B (que está no centro da órbita curvilínea) então há uma força que o obriga a isso, isto é, há uma força apontando para o centro da trajetória curvilínea obrigando os astros a executarem tal movimento. Eis o segundo aspecto na sua exposição para o qual queremos chamar atenção: as forças descritas no esquema anterior apresentam intensidade inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o astro A (que orbita ao redor) e astro B (que é o centro da órbita circular). De novo, os teoremas 1, 2 e 3 afirmam, respectivamente, esse resultado para a relação satélites jovianos/Júpiter (e também Saturno e seus satélites), para os seis binômios planeta/Sol (Mercúrio/Sol, Vênus/Sol, Terra/Sol, Júpiter/Sol e Saturno/Sol) e para a Lua ao redor da Terra. A esta altura do Livro III, convém destacar a discussão sobre “força centrípeta”, levada a cabo na Seção II do Livro I dos *Principia* (NEWTON 2002, pág. 83), cujo título é “A determinação de forças centrípetas”, objeto de nossa exposição no apêndice 1.

O 6º corolário do teorema 4 do Livro I é explicitamente citado como base da demonstração dos Teorema 1,2, e 3. É com ele que Newton faz a conexão entre a Terceira Lei de Kepler e a força centrípeta²⁷:

LIVRO I, TEOREMA 4, Corolário 6: Se os tempos periódicos forem como os raios, e os raios elevados à potência 3/2, e as velocidades, portanto, inversamente como os raios, as forças centrípetas serão inversamente como os quadrados dos raios; e vice-versa.²⁸

Assim, o argumento é que, se as relações Sol/Planetas, Júpiter/satélites jovianos (tal qual Saturno e seus satélites) e Terra/Lua são relações que obedecem à Terceira Lei de Kepler, e se o 6º corolário do 4º teorema do Livro I é verdade, então, a força que obriga o astro A a orbitar ao redor do astro B é, necessariamente, inversamente proporcional ao quadrado da distância entre tais astros. Se o binômio A/B for substituído por Lua/Terra, Io/Júpiter²⁹, Mercúrio/Sol, etc, o argumento pode ser esquematizado do seguinte modo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{fenômeno: astro A gira ao redor do astro B} \\ \text{fenômeno: 3ª Lei de Kepler} \\ \text{Livro I, Teorema 4, Corolário 6} \end{array} \right\} \Rightarrow F = \frac{1}{(\text{distância entre A e B})^2}$$

²⁷ Veja apêndice 1.

²⁸ NEWTON 2002, p. 89.

²⁹ Io é a denominação de uma das quatro primeiras luas (satélites) observadas de Júpiter.

Antes que nos voltemos ao escólio imediatamente posterior ao Teorema 4, queremos destacar uma ideia: hoje, usamos o verbo “gravitar” como sinônimo de “girar ao redor”; mas essa não era a compreensão até a publicação dos *Principia*. O Prof. Roberto Martins nos informa que a “... palavra gravidade significava, originalmente, apenas a propriedade dos corpos pesados (também chamados de “graves”), ou seja, aquilo que faz com que eles caiam ou empurrem para baixo ...”³⁰. Assim, quando Newton escreve que um objeto “gravita”, ele usa inicialmente o conceito até então existente, o que significava que tal objeto tende a cair ou ser empurrado para baixo. Avisados disso, podemos avançar.

Aspecto 3.

O escólio imediatamente posterior ao Teorema 4 é especialmente importante para mostrarmos um terceiro aspecto da argumentação newtoniana. É nele que Newton afirmará que a força que “mantém um astro em movimento curvilíneo ao redor de outro” é a mesma força que obriga os corpos a descenderem ou a executar o movimento de queda livre³¹! É nesse ponto que “gravitar” torna-se um verbo passível de uso para descrever o movimento de um satélite ao redor de um planeta ou de um planeta ao redor do sol!

Eis o escólio transcrito:

A demonstração desta Proposição pode ser explicada mais extensamente da seguinte maneira. Suponha que várias luas girem ao redor da terra, como no sistema de Júpiter e Saturno. Os tempos periódicos destas luas (pelo argumento da indução) observariam a mesma lei que Kepler obteve entre os planetas. Portanto, suas forças centrípetas seriam inversamente como os quadrados das distâncias ao centro da terra, pela Proposição 1 deste livro. Agora, se a lua mais baixa fosse muito pequena e estivesse tão próxima da terra de forma a quase tocar os topos das montanhas mais altas, sua força centrípeta mantendo-a em sua órbita seria aproximadamente igual aos pesos de quaisquer corpos terrestres que fossem encontrados nos topos destas montanhas, como pode ser conhecido do cálculo precedente. Portanto, se a mesma lua pequena fosse abandonada por sua força centrífuga que a carrega em sua órbita, e fosse impedida de seguir seu caminho, ela desceria para a terra. E isto com a mesma velocidade com que os corpos pesados caem de fato dos topos destas mesmas montanhas, devido à igualdade das forças que obriga ambos a descenderem... com velocidade dobrada como sendo impelida por estas duas forças atuando juntas... a gravidade dos corpos pesados e as forças centrípetas das luas, são direcionadas ao centro da terra, e são similares e iguais entre si...³²

³⁰ MARTINS, 2006.

³¹ Chamamos de “queda livre” o movimento vertical descendente de qualquer corpo que se move nas proximidades da superfície da Terra livre da força resistiva do ar e apenas sob a influência da sua força gravitacional.

³² NEWTON 2008, p. 198.

Comecemos pelo trecho “(...) Portanto, se a mesma Lua pequena fosse abandonada por sua força centrífuga que a carrega em sua órbita, e fosse impedida de seguir seu caminho, ela desceria para a Terra...”. O raciocínio é: se “abandonarmos” a tal lua pequena, no topo de uma montanha, como se abandona uma pedra qualquer, então observaríamos a queda livre da pequena lua cuja causa somente seria devido à ação de uma força que Newton chamará de gravidade e hoje chamamos força gravitacional.

Isaac Newton se antecede, no próprio escólio, a uma pergunta possível de seu leitor: não seriam tais forças – a força que obriga que o movimento seja curvilíneo e a força que determina a queda - duas forças distintas?! Posto que a queda livre de um corpo implica um movimento independente de sua massa, então, a pequena lua deve descer como qualquer outro corpo – como uma pedra por exemplo - quando solta... Ora, o argumento de Newton é, se a pequena lua experimentasse a ação de duas forças distintas, uma que a faz cair e outra (“... as forças centrípetas das luas...”), então ela deveria descender “... com velocidade dobrada, como sendo impelida por essas duas forças atuando juntas.” Esse fato, conhecido desde Galileu, - válido para um movimento, vertical para baixo a partir do repouso e sem resistência do ar - para qualquer corpo independente de sua massa, pode ser escrito em notação matemática moderna da seguinte maneira:

$$\left. \begin{array}{l} a = \text{constante} \Rightarrow v = v_0 + a \cdot t \\ \text{corpo abandonado} \Rightarrow v_0 = 0 \end{array} \right\} v = a \cdot t \quad \left. \begin{array}{l} a = \text{constante} \Rightarrow v = v_0 + a \cdot t \\ \text{corpo abandonado} \Rightarrow v_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta H = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a = \text{constante} \Rightarrow v = v_0 + a \cdot t \\ \text{corpo abandonado} \Rightarrow v_0 = 0 \end{array}} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta H}$$

O resultado anterior é verdadeiro para um grão de poeira, uma pedra, ou a pequena lua imaginada por Newton. Assim ele conclui que “(...) a gravidade dos corpos pesados e as forças centrípetas das luas, são direcionadas ao centro da terra, e são similares e iguais entre si (...)” além de terem “(...) uma mesma causa.”. É importante frisar que aqui subjazem as regras 1 e 2, dentre as “regras de raciocínio em filosofia” elencadas por Newton: se uma pedra qualquer e a pequena lua caem – dois fenômenos - do mesmo modo quando abandonadas, se devemos assumir uma única causa para explicar “aparências”³³ semelhantes (regra 1) e, finalmente, se para os “mesmos fenômenos naturais temos de atribuir as mesmas causas” (regra 2), então, a conclusão necessária: “(...) a força que mantém a lua em sua órbita é a mesma força que chamamos comumente de gravidade(...)”.

³³ Lembremo-nos que a palavra grega “*phainomenon*” literalmente significa algo “aparente”, algo que pode ser visto, algo observável.

Pela importância desse terceiro aspecto – o fato de que a força de gravidade e a força centrípeta sobre os planetas é a mesma - na argumentação de Newton, e pela beleza simples de sua discussão desse mesmo aspecto na sua outra obra “O Sistema do Mundo”, destacamos aqui seus argumentos. Encontramos o seguinte desenho ilustrativo³⁴, bastante elucidativo, para acompanhar o pensamento newtoniano.

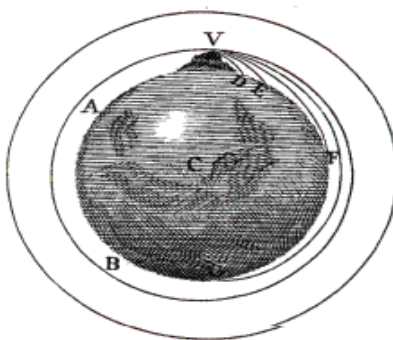


FIGURA 3: esquema proposto por Newton para ilustrar seu raciocínio de que a força gravitacional é uma força centrípeta.

Newton inicia o item três de “O Sistema do Mundo”, sob o título “A ação das forças centrípetas” com a seguinte afirmação:

“O fato de que, por meio de forças centrípetas, os planetas possam ser retidos em certas órbitas é facilmente compreendido se consideramos os movimentos dos projéteis(...)”³⁵

Galileu já havia ensinado que, no lançamento horizontal, devido à força peso, um projétil – uma pedra, por exemplo – executa um movimento curvilíneo até o chão. Newton enfatiza para seu leitor que é o peso que desloca – ou desvia – a pedra de seu movimento retilíneo inicial, afinal o lançamento original foi feito na direção horizontal. Tal qual nós sabemos, seus leitores também sabiam que o alcance da pedra projetada dependia da velocidade horizontal de lançamento, isto é, quanto maior essa velocidade, maior seria o alcance da pedra. Seu argumento é simples: se dotarmos a pedra de velocidades iniciais cada vez maiores, então, ela alcançará distâncias maiores; se ela alcança distâncias cada vez maiores, então, poderíamos iniciar o movimento da pedra com uma velocidade suficientemente grande para que - sem a resistência oferecida pelo ar e sem nenhum obstáculo pela frente – a pedra voltasse exatamente para o ponto original de lançamento e com a mesma velocidade horizontal de lançamento... Ora, se não houver ação resistiva do ar e se o projétil alcançar o mesmo ponto original de lançamento com a velocidade horizontal inicial, então, a

³⁴ NEWTON, 2008, p. 338.

³⁵ Ibidem, p. 337.

pedra projetada deveria repetir o movimento circundante ao redor da Terra *ad infinitum* !!! Eis aí o argumento de que a força centrípeta, que “prende” os astros em movimento curvilíneo ao redor de um astro central como a lua ao redor da Terra, é a mesma força gravitacional ou força peso!

É verdade que, num ambiente onde o ar é cada vez mais denso, a intensidade da velocidade da pedra projetada diminuirá devido à força resistiva oferecida pelo ar. Não é à toa que Newton faz questão de afirmar que, se projetarmos a pedra – sempre horizontalmente – em altitudes cada vez maiores, ela descreverá trajetórias circulares concêntricas com a Terra: e não é exatamente isso o que a lua faz ao redor da Terra, ou Io ao redor de Júpiter, ou Mercúrio ao redor do Sol?!

Vale aqui transcrever um excerto de “O Sistema do Mundo”:

“Mas se imaginarmos a projeção de corpos na direção de linhas paralelas ao horizonte a partir de alturas maiores, de 5, 10, 100, 1000 ou mais milhas, ou ainda de tantos semidiâmetros da Terra, esses corpos, de acordo com suas diferentes velocidades e diferente força da gravidade em diferentes alturas, descreverão arcos concêntricos com a Terra, ou diversamente excêntricos, e permanecerão girando nessas órbitas assim como os planetas em suas órbitas”³⁶

Aspecto 4.

Eis o quarto aspecto da argumentação que queremos destacar. A análise anterior nos leva, necessariamente, a mais uma conclusão, a saber: se projetamos uma “lua pequena” tal qual uma pedra nas condições descritas, e se a lua ao redor da Terra executa seu movimento tal qual uma pedra projetada horizontalmente o faria, então, não importa a dimensão do corpo projetado, isto é, não importa se o corpo projetado é um planeta ao redor do Sol, ou um satélite ao redor de um planeta, ou uma pequena lua, ou uma pedra ou, ainda, um grão de poeira! Dito de outro modo: essa força centrípeta – ou gravitacional - é típica de todos os corpos com massa, sejam “pequeninos” como uma semente ou “grandes” como um astro. Lembremo-nos que foi somente com os *Principia* que passamos a usar o vocábulo “gravitar” também no sentido de um objeto que descreve uma trajetória curvilínea ao redor de outro, como a lua ao redor da Terra, além do significado original de “algo que tende para baixo” ou “algo que cai”.

³⁶ NEWTON, 2008, p. 338.

Aspecto 5.

Quinto aspecto: Essa força tem intensidade proporcional à massa do corpo atraído. A demonstração desse Teorema é relativamente intrincada. Newton faz referência a uma série de fenômenos hipotéticos: primeiro, um “corpo de prova” e a própria Lua que cairiam em direção à Terra a partir da posição da Lua; segundo, tal qual a Lua caindo para a Terra, ele cita os satélites jovianos caindo em direção à Júpiter e assim também os satélites de Saturno caindo em direção a Saturno; terceiro, os planetas caindo em direção ao Sol, a partir do repouso. Tomando tais hipóteses, ele afirma que a intensidade da força gravitacional sobre um corpo é proporcional à sua “quantidade de matéria”, que hoje chamamos de “massa”. Ele escreve:

TEOREMA 6: Que todos os corpos gravitam em direção a todos os planetas e que os pesos dos corpos em direção a qualquer um dos planetas, a distâncias iguais do centro do planeta, são proporcionais às quantidades de matéria que eles contêm.³⁷

Essencialmente, seu argumento reside no seguinte esquema:

$$\left. \begin{array}{l} queda\ livre \Rightarrow a_A = a_B = a \\ m_A > m_B \\ F_{resultante} = m \cdot a \end{array} \right\} m_A \cdot a > m_B \cdot a \Rightarrow P_A > P_B$$

A linha de argumentos começa com o fato de que o intervalo de tempo durante a queda livre para corpos com massas diferentes é exatamente o mesmo; imaginemos dois corpos com massas A e B, diferentes, isto é $m_A \neq m_B$. Chamaremos cada um deles de “corpo de prova” ou “massa de prova”. A partir do momento no qual Newton afirmou que não há distinção entre um astro e uma pedra, a expressão “corpo de prova” se torna interessante, pois nos lembra o que ambos têm em comum - tanto a Lua como uma pedra caindo em direção à Terra: o fato de serem um corpo qualquer em queda, isto é, podemos substituir um corpo pelo outro para “provar” ou “testar” a afirmação.

Ora, se corpos com “quantidades de matéria” diferentes percorrem distâncias iguais em intervalos de tempo iguais, então, estão submetidos à mesma aceleração (a aceleração que chamamos hoje de “aceleração gravitacional”); além disso, a partir da segunda lei do movimento (a força resultante sobre um corpo é proporcional à sua massa e à aceleração que ele experimenta) então, deve-se admitir que, sob mesma aceleração e com massas diferentes,

³⁷ NEWTON, 2008, p. 200.

os corpos são atraídos com forças resultantes – neste caso, a força Peso – diferentes, ou melhor, com forças resultantes proporcionais às suas massas. Esquemáticamente, escreveríamos:

$$P \propto m \text{ (massa do corpo de prova)}$$

É importante destacar um aspecto do Teorema 6. Newton coloca uma condição no teorema: para realizar os testes, os corpos de prova precisam ser soltos de distâncias iguais do centro do planeta, ou seja, da mesma “altura”. Isso está em ressonância com o seguinte resultado atualmente escrito por nós:

$$g = \frac{G \cdot M}{H^2}$$

onde “M” é a massa do planeta esfericamente homogêneo, massa essa entendida como concentrada no centro do planeta e “H” é a distância de tal centro até o ponto no qual se deseja calcular o valor de “g”. A expressão moderna anterior lembra que a aceleração gravitacional “g”, criada por um planeta de massa M, depende da altura H onde é calculada. Assim, no Teorema 6 do Livro 3, vemos a preocupação em garantir que, tendo fixada a altura do início da queda livre, a força gravitacional sobre um corpo de prova só pode depender de sua massa.

Aspecto 6.

O Teorema 7 nos levará ao sexto aspecto da argumentação newtoniana que queremos destacar:

TEOREMA 7: Que há um poder de gravidade pertencente a todos os corpos, proporcional às várias quantidades de matéria que eles contêm.³⁸

Já lembramos linhas atrás que, atualmente, escrevemos que a aceleração gravitacional gerada por um corpo é escrita assim:

$$g = \frac{G \cdot M}{H^2}$$

³⁸ NEWTON, 2008, p. 203.

A afirmação do Teorema 7 diz respeito à massa que, na linha anterior aparece com a letra “M”. Eis o sexto argumento: Newton está afirmando que aquilo a que hoje chamamos de “campo gravitacional”³⁹, ou “perturbação gravitacional”, ou aceleração gravitacional gerada por um corpo de massa M depende dessa mesma massa! Essencialmente, seu argumento repousa na terceira lei de movimento a que hoje chamamos de Lei de Ação e Reação. Lembremo-nos: se um corpo A exerce uma força sobre outro corpo B, então o corpo B também exerce outra força sobre o corpo A, sendo de igual intensidade que a primeira, com mesma direção e sentido oposto. Ou dito de outro modo: se um corpo de massa “M” atrai outro corpo de prova com massa “m”, então, necessariamente, o corpo de prova atrai também o primeiro corpo. Se dissermos que um corpo tem massa m_A e outro tem massa m_B , então, podemos escrever esquematicamente assim:

$$\left. \begin{array}{l} F_{AB} \propto m_B \\ F_{AB} = F_{BA} = F \\ F_{BA} \propto m_A \end{array} \right\} \Rightarrow F \propto m_B \cdot m_A$$

As ideias esboçadas anteriormente devem ser entendidas do seguinte modo: se um corpo de massa “M” ou m_A , como a Terra, por exemplo, atrai outro corpo de massa “m” ou “ m_B ”, então, dizemos que o primeiro corpo – a Terra – atrai o segundo corpo – a Lua – com uma força que simbolizamos $\overrightarrow{F_{AB}}$. Tal notação indica a força que o corpo A exerce sobre o corpo B, ou seja, falamos do “puxão” que o corpo B experimenta pelo corpo A. Por outro lado, a atração que o corpo A experimenta pelo corpo B, é representada por $\overrightarrow{F_{BA}}$ (atenção: as letras no subíndice foram trocadas de lugar). A lei de ação e reação afirma que as intensidades dessas duas forças é a mesma, ou em notação moderna, escrevemos: $|\overrightarrow{F_{BA}}| = |\overrightarrow{F_{AB}}|$ (preste atenção nos subíndices!). Ora, se a atração que o corpo B experimenta é proporcional à sua própria massa, se a atração que o corpo A experimenta também é proporcional à sua própria massa e se, finalmente, ambas as forças apresentam mesma intensidade, então, –

³⁹ Veja exemplo 4 do capítulo 4.

necessariamente – a intensidade de ambas é proporcional às duas massas, ou ao produto de ambas! Esquemáticamente, o argumento pode ser representado:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{F}_{AB}| \propto m_B \\ |\vec{F}_{AB}| \propto m_A \\ |\vec{F}_{BA}| = |\vec{F}_{AB}| = F \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F \propto m_B \\ F \propto m_A \end{array} \right\} \Rightarrow F \propto m_A \cdot m_B$$

No Ensino Médio, ao estudar o tema gravitação, assumimos os corpos como pontos materiais, ou seja, desprezamos as suas dimensões e imaginamos que toda a sua massa está concentrada em um único ponto. Newton apresenta justificativa para isso em seu Teorema 8 do Livro 3:

TEOREMA 8: Se em duas esferas gravitando uma em direção à outra, a matéria é semelhante em todos os lugares circundantes e equidistantes dos centros, o peso de cada esfera em direção à outra será inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros.⁴⁰

O que nos leva ao sétimo item da argumentação newtoniana que queremos destacar:

Aspecto 7.

O sétimo item: é possível estudar tal força tomando os corpos como pontos materiais. Para sustentar sua afirmação, Newton invoca os Teoremas 35 e 36 do Livro I⁴¹.

Assim, se tentarmos escrever todos os resultados anteriores em uma única expressão matemática, podemos fazê-lo assim:

$$F \propto \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Escrevendo desse modo, afirmarmos três ideias. Primeiro, que a força de interação entre dois corpos é diretamente proporcional às massas de ambos. Segundo: tal força é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Terceiro: não importa se as

⁴⁰ NEWTON, 2008, p. 204.

⁴¹ NEWTON, 2002, pp. 258 -259.

massas envolvidas são “pequenas” ou “grandes”. Atualmente, em sala de aula, escrevemos a lei descoberta por Newton, como a seguir:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Onde “G” é a “constante de Cavendish”, estimada décadas depois da morte de Isaac Newton.

Aspecto 8.

Um teste fundamental foi feito por Newton: calcular “quanto vale, na superfície da Terra, a força necessária para manter a Lua em órbita”. Juvenal Savian Fº nos diz que “o melhor debate filosófico está nas premissas e nos pressupostos”⁴². Coerentemente com isso, vale agora verificar se os pressupostos de Newton conduzem a um resultado que autentique o “Sistema de Mundo” ou “Modelo de Mundo” proposto por ele... Como havíamos dito no item de título do capítulo 1, “O formato da argumentação”, há algo de especial na obra de Newton que a distingue de uma obra de matemática pura: o fato de que o conteúdo trabalhado pelo cientista tem como objeto a natureza. Isso implica que os resultados previstos no encadeamento da argumentação precisam ser observados no mundo natural. Se não o forem, a modelagem matemática, a sistematização, está equivocada e, por isso, deve ser melhorada ou substituída. O teste proposto aqui, se bem sucedido, demonstraria a pertinência do modelo de mundo newtoniano.

Para comparar a influência gravitacional da Terra sobre a Lua e sobre um corpo na superfície terrestre não usaremos completamente aqui a abordagem geométrica usada por Newton para efetuar tal comparação, mas, sim, o recurso algébrico usado atualmente no Ensino Médio. Assumindo o pressuposto de Newton de que há uma única e idêntica ação gravitacional ao redor da Terra – tanto em sua superfície quanto em um lugar distante dela -, o objetivo é checar se a ação gravitacional é, de fato, inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos que interagem; se obtivermos dados observacionais coerentes com o modelo newtoniano, então comprovaremos tal validade. Vejamos o confronto entre modelo e natureza em duas etapas.

⁴² Veja SAVIAN, F., 2010.

Primeira etapa. Estimaremos o deslocamento da Lua ao longo de sua órbita ao redor da Terra durante o intervalo de tempo de 1 segundo⁴³. Para isso, imaginaremos que a força centrípeta sobre a Lua lhe impõe um desvio de sua trajetória natural em linha reta (Lei da Inércia).

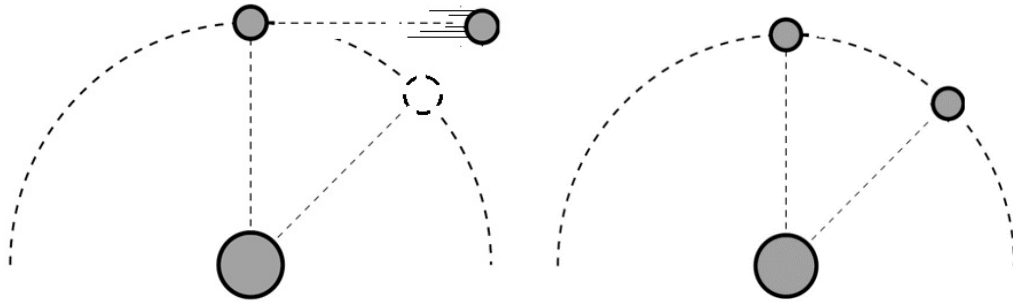


FIGURA 4: Movimento sob inércia e Movimento sob força centrípeta.

Devido às dimensões envolvidas, assumiremos a Terra e a Lua como pontos materiais. Assim, podemos esquematizar o movimento do seguinte modo: se não fosse perturbada pela ação gravitacional terrestre, a Lua se moveria sobre uma linha tangente entre os pontos A e B (veja a próxima ilustração). Mas, devido a tal ação, ela executa o movimento curvo e, no mesmo tempo em que percorreria a distância $\overline{AB}$, alcança, de fato, o ponto C.

Assim, a pergunta que fazemos aqui é: qual é o desvio experimentado pela Lua sob a ação da força centrípeta? Ou, dito de outra maneira: qual é o valor do desvio $\overline{BC}$?!

Da análise geométrica na figura seguinte⁴⁴ é possível deduzir que

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{AT}}$$

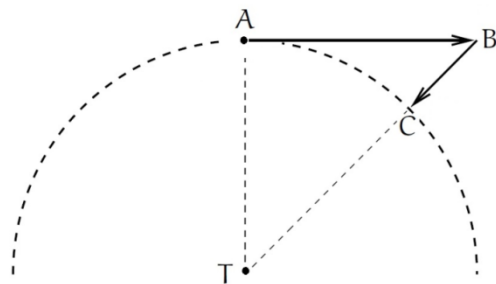


FIGURA 5: combinação da inércia e da força centrípeta

⁴³ A análise aqui desenvolvida tem como base o 4º Teorema do LIVRO 3 dos Principia (NEWTON, 2009, p. 197) e MARTINS, 2006.

⁴⁴ Extraído de MARTINS, 2006.

Da ilustração anterior, percebemos que $\overline{AT}$ é exatamente o raio $R_{\text{órbita}}$ da trajetória circular. Sabendo o valor de $\overline{AT}$, é necessário encontrar o valor de $\overline{AB}$, que a Lua percorreria tangencialmente na ausência da ação gravitacional terrestre, para estimar o desvio $\overline{BC}$. Assumindo que Lua executa uma volta completa ao redor da Terra em 27 dias, 7 horas e 43 minutos, podemos estimar o quanto ela se moveria ao longo da linha tangente em movimento uniforme durante 1 segundo, assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} 27 \text{ dias } 7 \text{ horas } 43 \text{ minutos} \text{ --- uma volta completa} \\ 1 \text{ segundo} \text{ --- } \overline{AB} \end{array} \right.$$

Lembremos que uma volta completa equivale a percorrer a circunferência de perímetro $2 \cdot \pi \cdot R_{\text{órbita}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 27 \text{ dias } 7 \text{ horas } 43 \text{ minutos} \text{ --- } 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{órbita}} \\ 1 \text{ segundo} \text{ --- } \overline{AB} \end{array} \right.$$

O que nos permite escrever:

$$27 \text{ dias } 7 \text{ horas } 43 \text{ minutos} \cdot \overline{AB} = 1 \text{ segundo} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{órbita}}$$

É necessário escrever o tempo de ambos os lados da igualdade anterior na mesma unidade, que escolhemos ser o minuto:

$$39343 \text{ minuto} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{60} \text{ minuto} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{órbita}}$$

$$60 \cdot 39343 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{órbita}}$$

Assumindo que o raio da Terra é de, aproximadamente⁴⁵, $6,34 \cdot 10^6$ m, e que a o raio da órbita lunar ao redor da Terra é cerca de sessenta vezes maior que o raio da Terra ($R_{\text{órbita}} = 60 \cdot R$)⁴⁶, podemos reescrever a linha anterior:

$$60 \cdot 39343 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{órbita}}$$

⁴⁵ HALLEY; RESNICK; WALKER, 2002.

⁴⁶ Dado esse também conhecido por Newton.

$$60 \cdot 39343 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot R$$

$$39343 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$39343 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \pi \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ metros}$$

$$\overline{AB} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,37 \cdot 10^6}{39343}$$

$$\overline{AB} \cong \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{39343}$$

$$\overline{AB} \cong 1101 \text{ metro}$$

Com o resultado anterior, podemos voltar para a expressão:

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{AT}} = \frac{\overline{AB}^2}{2 \cdot R_{\text{órbita}}}$$

$$\overline{BC} = \frac{1101^2}{2 \cdot 60 \cdot R}$$

$$\overline{BC} = \frac{1101^2}{2 \cdot 60 \cdot 6,37 \cdot 10^6}$$

$$\overline{BC} = \frac{1101^2}{2 \cdot 60 \cdot 6,37 \cdot 10^6}$$

$$\overline{BC} \cong 0,00158 \text{ m}$$

$$\overline{BC} \cong 1,58 \text{ mm}$$

A linha anterior nos diz, então, que, ao longo de 1 segundo, a ação gravitacional da Terra sobre a Lua a faz mover-se 1,58 mm da trajetória retilínea (que executaria na ausência da Terra) em direção ao centro da Terra.

A segunda etapa dessa comparação consiste em verificar algebricamente qual o deslocamento em direção ao centro da Terra que a Lua percorreria se a soltássemos em queda livre de sua posição atual, a partir do repouso (queda livre). Para fazê-lo, precisamos lembrar o que Newton conjecturou, isto é, que, se a ação gravitacional terrestre também alcançava o

local onde a Lua estava, então, naquela posição, ela deveria ser “diluída” com o fator 3600, posto que a Lua orbita numa altura sessenta vezes maior que o raio da Terra. Tal raciocínio pode ser esquematizado com a seguinte regra de três:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\text{superfície terrestre}} \text{ ————— } 1/R^2 \\ g_{\text{local}} \text{ ————— } 1/R_{\text{órbita}}^2 \end{array} \right.$$

O que nos permite escrever:

$$g_{\text{local}} \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_{\text{órbita}}^2} \cdot g_{\text{superfície terrestre}}$$

$$g_{\text{local}} \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{1}{(60 \cdot R)^2} \cdot g_{\text{superfície terrestre}}$$

$$g_{\text{local}} \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{1}{3600 \cdot R^2} \cdot g_{\text{superfície terrestre}}$$

$$g_{\text{local}} = \frac{1}{3600} \cdot g_{\text{superfície terrestre}}$$

Agora, ao estudar o MUV⁴⁷ aplicado à queda livre, expressamos a relação de tempo, deslocamento e ação gravitacional do seguinte modo:

$$\Delta H = \frac{1}{2} \cdot g_{\text{local}} \cdot t^2$$

E, então, podemos, junto da intensidade da gravidade na superfície terrestre, para uma queda livre durante o intervalo de tempo de 1 segundo, estimar o deslocamento vertical de um corpo que cai de uma altura equivalente à altura em que está a Lua:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta H = \frac{1}{2} \cdot g_{\text{local}} \cdot t^2 \\ g_{\text{superfície terrestre}} = 9,8 \text{ m/s}^2 \\ t = 1 \text{ segundo} \\ g_{\text{local}} = \frac{1}{3600} \cdot g_{\text{superfície terrestre}} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta H \cong 1,58 \text{ mm}$$

Notemos a semelhança entre o resultado anterior e a distância $\overline{BC} \cong 1,58 \text{ mm}$, estimada por Newton. Newton interpretou tal semelhança do seguinte modo: o movimento da

⁴⁷ Movimento Uniformemente Variado.

Lua ao redor da Terra é um movimento composto⁴⁸ pelo movimento inercial da Lua e pelo movimento provocado na Lua pela atração Terrestre; ora, se a Lua não se movimentasse com uma velocidade tangencial, mas fosse apenas colocada em repouso na altura que ela ocupa, ela se movimentaria em queda livre, tal qual uma pedra próxima da superfície da Terra cai, com a diferença de que estaria submetida, lá no alto, a uma ação terrestre mais tênue, pois inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o centro da Terra e o centro da Lua! É importantíssimo perceber que esses resultados compatibilizam o modelo de Mundo proposto por Newton e os dados observáveis na natureza. Essa compatibilidade é especialmente importante para sustentar o terceiro aspecto que apontamos páginas atrás na argumentação de Newton: essa compatibilidade era a prova experimental de que as duas forças - a força centrípeta, que mantém a Lua em órbita ao redor da Terra e a força gravitacional, que obriga os corpos a caírem - eram uma e única força!

⁴⁸ Leia sobre o “modelo desviacional” no capítulo 3.

III. MATEMATIZAÇÃO E INTELIGIBILIDADE

Christian Huygens é citado como um expert em seu tempo ao investigar matematicamente fenômenos físicos⁴⁹. Como seguidor das ideias cartesianas, ele teria passado por uma “saia justa” ao perceber que as “regras dos choques” – ou “leis das colisões” – formuladas por Descartes sobre colisões previam resultados incompatíveis com os resultados medidos quando os experimentos eram realizados; dito de outra maneira, o cientista dinamarquês teria percebido que “a prática era incoerente com a teoria”, em se tratando da teoria formulada por Descartes. Huygens teria anunciado seus resultados à *Royal Society*, em Londres, em 1660. Curiosamente, esse anúncio e o debate seguinte na *Royal Society* antecederam um dos primeiros manuscritos de Newton, no qual ele faz investigações também quantitativas sobre mecânica, a saber, o manuscrito conhecido como “*Waste Book*”. O vocábulo “*waste*” pode ser traduzido como “resíduo”. Assim, literalmente, esse famoso manuscrito de Newton poderia ser chamado de “livro dos resíduos”; dado o contexto, talvez valesse pensá-lo como um “Livro de Rascunhos”. Encará-lo assim é interessante, se lembrarmos que ele registra os pensamentos iniciais de Newton que o levariam a publicar a Lei de Atração Gravitacional tantos anos depois.

O trabalho de reflexão de Newton é longo, isto é, ocorreu no decorrer de muitos anos. Por exemplo, o período entre o *Waste Book* e a publicação da primeira edição dos *Principia* é de cerca de 20 anos. Se levarmos em conta que há aprimoramentos entre a primeira edição dos *Principia* em 1687 e a terceira edição em 1726 (quase 40 anos depois da primeira edição), teremos alguma noção do tempo ao longo do qual os pensamentos newtonianos foram maturados. Nesse contexto, o uso da linguagem matemática foi fundamental para a evolução e sofisticação das ideias; no *Waste Book* – datado de meados da década de 1660, isto é, cerca de 60 anos antes da terceira edição dos *Principia* - estão registradas investigações sobre colisões na tentativa de analisar o movimento circular, o que expandiria a compreensão newtoniana de “força” e, mais especificamente, daquela que viria a ser chamada por Newton de “força centrípeta”. A característica mais⁵⁰ importante no manuscrito, segundo o professor Eduardo Sales de Oliveira Barra, é a abordagem quantitativa na busca pelas causas externas que provocam variação no movimento de um corpo. Newton modela geometricamente o fenômeno, procurando entender as forças envolvidas em uma colisão. O tratamento matemático empreendido por Newton não só o ajudaria a quantificar a ação externa sobre o

⁴⁹ BARRA, 1994, página 20.

⁵⁰ Idem.

corpo que colide, como também teria aberto caminho para o estudo do movimento circular. Notemos o fato de que, à medida que os fenômenos começam a ser descritos matematicamente, novas perspectivas e compreensões aparecem, posto que os fenômenos físicos (os fenômenos naturais) tornam-se mais e mais inteligíveis. Nesse momento, Newton teria usado pela primeira vez o vocábulo “força” para identificar a ação de um corpo sobre o outro⁵¹.

A essa altura, vale um parêntese: se alguém for ler, sem aviso, as demonstrações de Newton, pode assustar-se com a “forma” de sua escrita: Newton associava o “segmento de reta” ao comprimento, à velocidade, à aceleração, enquanto hoje designamos essas grandezas por si mesmas, ou seja, nós as caracterizamos diretamente, e não através de um efeito espacial que causam... Nós as distinguimos através de unidades que carregam em si a definição de cada grandeza; por exemplo: um vetor velocidade, além de apresentar uma orientação espacial (para “onde” um móvel se move naquele instante), também é caracterizado por sua unidade – por exemplo, “metro por segundo” – o que nos obriga a pensar na definição de velocidade como uma “taxa que mede o deslocamento percorrido no tempo”. O leitor poderá encontrar no apêndice 1, exemplo daquele modo de argumentar ou fazer demonstrações, nos quais tentamos demonstrar “ao estilo dos *Principia*” a origem da expressão matemática da aceleração centrípeta.

Feita a digressão, avancemos: Herivel⁵² nos lembra que, à medida que Newton investiga matematicamente o movimento circular, à medida que ele “geometriza” o fenômeno do movimento circular, consegue associar uma expressão quantitativa de tal força à ideia rudimentar e vulgar de “força” como “empurrão”, pois foi capaz de exprimir a mudança de movimento vinculada a tal “empurrão”, a mudança de movimento como consequência de tal “empurrão”. Destacamos aqui o uso das aspas em torno do vocábulo “empurrão”. Queremos com isso chamar atenção para o fato segundo o qual há uma ideia intuitiva e natural de “força” e que é em Newton que tal ideia é associada ao efeito de mudar o movimento de um corpo que sofre tal “empurrão”, tal “força”: com um olhar de centenas de anos depois e como herdeiros intelectuais do trabalho de Newton, não é difícil ver, naquele momento, o vínculo entre força e aceleração, entre força e variação de quantidade de movimento, enfim, vislumbrar aquilo que conhecemos hoje como segunda lei de Newton. Embora Newton não tenha escrito literalmente $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (como habitual e corriqueiramente escrevemos hoje), é

⁵¹ BARRA, 1994, p. 20 citando HERIVEL, 1965, p.138.

⁵² HERIVEL, 1965, p. 8.

fato que o fazemos porque ele, lá atrás, exprimiu aceleração como função de força e o fez quando tentou matematizar a natureza.

Ao mesmo tempo em que Newton expressa suas ideias geometricamente, isto é, tenta descrever com linguagem matemática o fenômeno do movimento circular, sua compreensão de força também evolui. É interessante prestar atenção aos termos usados nesse processo de busca e desenvolvimento do conceito de força. Associar a expressão “*conatus*” aos primeiros textos nos ajuda a lembrar como ele era entendido, àquela altura, na mente do cientista. Cabe lembrar que pesquisadores de história e filosofia da ciência, ao utilizarem expressões originais, não o fazem por pedantismo ou mera exibição de erudição. Lembrar quais expressões foram usadas e em que momento da produção intelectual do cientista isso aconteceu é um modo de entender as próprias ideias e o processo evolutivo do pensamento científico. Exemplo de tal preocupação pode ser notado quando o Prof. Eduardo Barra, ao investigar o conceito de “força” em Isaac Newton discute o significado da expressão “*conatus*” em Descartes – autor lido por Newton e que o influenciou – para quem tal expressão poderia ser traduzida ou pelo vocábulo “tendência” ou pela palavra “esforço”. Barra insiste que, independente da tradução, “*conatus*” significa, em Descartes, não uma “força” no sentido moderno, mas uma disposição para certo movimento.

Herivel⁵³ nos informa que, enquanto Descartes ilustrava o problema ao redor do qual a discussão “força centrífuga/força centrípeta” ocorre com uma pedra lançada através de uma funda (veja a figura⁵⁴ adiante), Newton escolheu tratar de tal problema – inicialmente – a partir do movimento executado por uma esferinha que se moveria em trajetória circular limitada por uma “parede” de formato circular. Tal escolha permitiu uma evolução, posto que Newton foi capaz de começar a expressar quantitativamente o efeito da força que ele viria a chamar de força centrípeta. Tal escolha teria demonstrado uma “maneira engenhosa” – expressão do próprio Herivel - de permitir a “quantificação” da força na investigação.

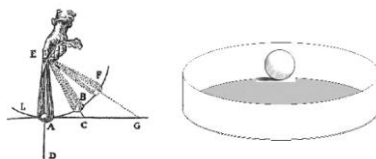


FIGURA 6: o esquema de Descartes sugere que a esfera é obrigada pela funda a executar o movimento circular e o esquema seguinte sugere que a esfera é obrigada a executar o mesmo movimento devido à ação da parede lateral

⁵³ HERVIEL, 1965, p. 8. BARRA, 2007, p. 22.

⁵⁴ A imagem da funda sustentada por uma mão é do próprio Descartes. Veja DESCARTES, 2007, p. 79.

Um comentário sobre a ilustração anterior antes de prosseguirmos: Newton não fala de uma esferinha dentro de uma bandeja de borda circular como o desenho anterior sugere. Ele pensa de maneira genérica, mais abstrata - tal qual um matemático puro - em uma esfera se movendo limitada por uma casca esférica externa. Todavia, o esquema anterior é essencialmente pertinente, posto que hoje nós diríamos que, numa superfície horizontal com atrito desprezível onde as forças de apoio (força normal) e gravitacional se equilibram, a esfera, inicialmente lançada contra a parede, executaria o movimento curvilíneo, obrigada a isso pela força de contato com a parede lateral, que atuaria como força resultante centrípeta. Continuemos:

A opção de “geometrizar” o movimento circular a partir do círculo e, portanto de “quantificar”, se por um lado foi uma evolução na investigação, também se apresentou, na sequência, como uma limitação. A solução encontrada por Newton (também registrada em suas notas no *Waste Book*) teria sido então, modelar o problema a partir da “geometria do quadrado”. Isso teria permitido uma quantificação mais exata do efeito da força centrípeta. Barra⁵⁵, repetindo Herivel⁵⁶, lembra-nos que, ao escolher um quadrado inscrito no círculo como paradigma para estudar o movimento circular, Newton teria escapado da “tirania do círculo”. Lembremos aqui que foi tal abordagem que usamos no apêndice 1, ao tentar expressar uma argumentação semelhante à de Newton para o resultado tão facilmente aceito hoje para $|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$!

Há um manuscrito⁵⁷ de Newton (*“The law of motions”*) escrito cerca de cinco anos após o *Waste Book* no qual Newton passaria a adotar um terceiro modelo geométrico para estudar a força centrípeta: do “tratamento poligonal”, Isaac Newton passaria para um “tratamento desviacional”. O esquema que nos permite compreender o motivo do vocábulo “desviacional” já foi usado no capítulo 2⁵⁸ e é apresentado novamente a seguir.

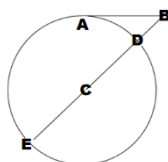


FIGURA 7: esquema para entender a combinação de inércia e força centrípeta

⁵⁵ BARRA, 1994, p. 24

⁵⁶ HERIVEL, 1965, p. 8

⁵⁷ Veja BARRA, 1994, p. 28 e 184. Eduardo Barra identifica o manuscrito com o título “U.C.L. MS Add. 3958.5, fólhos 81-83 (*The Laws of Motion*)”.

⁵⁸ Veja o “aspecto 8” no capítulo 2.

Essencialmente, a ideia subjacente ao modelo é pensar que um corpo em movimento circular uniforme, num certo intervalo de tempo, se estivesse livre da ação da força centrípeta que o obriga a percorrer a trajetória circular, percorreria uma trajetória retilínea tangente ao ponto da trajetória circular no qual a força centrípeta deixou de atuar. Dizendo o mesmo de outro modo: se, no ponto A descrito no esquema, a força que obriga o corpo a se mover em círculo (a força centrípeta) deixasse de existir, então, ele continuaria o percurso em linha reta, isto é, sobre a linha tangente ao círculo no ponto A. Ora, a ideia de Newton foi “associar” a distância BD do desenho à intensidade da força centrípeta: quanto mais intensa a força centrípeta, maior seria a distância BD. Se o leitor voltar os olhos para o capítulo 2, argumento 7, perceberá que foi exatamente esse modelo que deu sustentação para a tão importante prova experimental de Newton lá descrita.

Convém chamar a atenção para algo: se, por um lado, “matematizar” leva ao aprofundamento da análise física, então, por outro, o estudo da natureza subsequente pode provocar na mente do cientista novos modelos matemáticos. Parece ser o caso aqui. Quando essa “abordagem desviacional” é feita por Newton, substituindo a “abordagem poligonal” no estudo do movimento circular, a ênfase nas “colisões” sofridas pela esferinha limitada por uma parede côncava externa havia desvanecido⁵⁹ ante a analogia entre a “força gravitacional” que apareceria de modo explícito na primeira edição dos *Principia* em 1687. O processo⁶⁰ pelo qual Newton passa ao investigar a força centrípeta e, finalmente, a força gravitacional é um exemplo forte em ciências de que matematizar fenômenos permite tornar a natureza mais inteligível, mais compreensível: em ciências há um círculo virtuoso da produção intelectual, proporcionado pela “matematização” dos fenômenos físicos, pois a modelagem matemática permite maior compreensão, e uma compreensão mais profunda permite nova modelagem matemática.

Se, por um lado, o modelo copernicano do mundo era visto apenas como uma “ferramenta” matemática que facilitava a previsão das posições dos astros distinta do funcionamento real do mundo, isto é, o modelo não era encarado como a descrição real do mundo natura,- por outro lado, Newton radicaliza a “matematização” da natureza ao afirmar que os fenômenos naturais são perfeitamente descritos com a modelagem matemática! Descrever fenômenos matematicamente permite entender a natureza, o que pode torná-la

⁵⁹ BARRA, 1994, p. 28.

⁶⁰ Como exemplo, lembremo-nos que o intervalo de tempo entre os dois manuscritos citados, onde em um é usado o modelo poligonal e em outro é usado o modelo “desviacional” é de aproximadamente cinco anos.

controlável e manipulável. O que Galileu apontou em 1623, em seu *Il Saggiatore*⁶¹, foi levado ao extremo por Isaac Newton:

É no *Saggiatore* que Galileu afirma, alto e bom som, que o livro da natureza é escrito em linguagem matemática...⁶²

Seu nível de matematização – ou de modelagem matemática - é tão sofisticado que ele pode, com seu modelo feito, voltar-se para a natureza e confrontar seu funcionamento com a previsão matemática. Há em Newton uma convicção clara, idêntica à de Galileu Galilei: o mundo dos fenômenos naturais não é somente “descrito” com a matemática, mas ele é matemático essencialmente! Exemplo disso é dado por Bernard Cohen quando ele afirma haver uma distinção⁶³ no uso das palavras “atração” e “gravitação” na obra de Newton. Segundo ele, enquanto a primeira aparece abundantemente nos livros I e II dos *Principia*, o segundo vocábulo aparece somente no livro III (“Sistema de Mundo”): ora, tal postura é interessante, pois a obra “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural” teria sido organizada por Newton de modo que o Livro III expusesse o sistema de funcionamento da natureza – aquilo a que chamamos de Física -, enquanto nos livros I e II teriam sido expostos apenas modelos hipotéticos, descritos matematicamente; vejamos um exemplo nos corolários 6 e 7 do 4ª Teorema do LIVRO I:

TEOREMA 4, Corolário 6: Se os tempos periódicos forem como os raios elevados à potência $3/2$, e as velocidades, portanto, inversamente como as raízes quadradas dos raios, as forças centrípetas serão inversamente como os quadrados dos raios; e vice-versa.⁶⁴

TEOREMA 4, Corolário 7: E, geralmente, se o tempo periódico for como qualquer potência R^n do raio R , e a velocidade, portanto, inversamente como a potência R^{n-1} do raio, a força centrípeta será inversamente como a potência $R^{2,n-1}$ do raio; e vice-versa.⁶⁵

Notemos que, no Livro I, Newton além de ter estudado uma força com intensidade proporcional ao inverso do quadrado da distância, também investiga outras forças hipotéticas, cuja intensidade depende do inverso de uma potência qualquer da distância. No Livro I, todas essas forças são apenas hipóteses matemáticas, cujas órbitas são previstas teoricamente. No Livro III, a força inversamente proporcional ao quadrado da distância deixa de ser hipótese para assumir o caráter de expressão real da natureza. Enfatizando: Newton esboça quais

⁶¹ *Il Saggiatore* (O Ensaíador) foi escrito por Galileu Galilei e publicado em 1623.

⁶² VERDET 1991, p. 137.

⁶³ COHEN, 1967, p. 100.

⁶⁴ NEWTON, 2002, p. 89.

⁶⁵ Idem.

seriam os efeitos físicos de uma hipotética força com intensidade inversamente proporcional a uma potência qualquer da distância, além de investigar as consequências de uma força com intensidade inversamente proporcional ao quadrado da distância; mas, em seu “sistema de mundo”, em sua descrição da natureza, em sua descrição da física, apenas a última aparece, pois os dados observacionais levam a ela somente. Como vimos no capítulo 2, Newton, coerentemente com essa postura, escreveu no Livro III, que “Nos livros precedentes estabeleci os princípios de filosofia, não princípios filosóficos, mas matemáticos...”. Os livros citados por ele como “precedentes” são os Livros I e II. No excerto seguinte, faz questão de dizer que ilustrou “aqui e ali” os Livros I e II com comentários sobre Física (“escólios filosóficos”) para evitar a aridez da matemática pura:

[...] Para evitar que parecessem secos e estéreis, ilustrei-os aqui e ali com alguns escólios filosóficos, explicando coisas que são de uma natureza mais geral e sobre as quais parece apoiar-se principalmente a filosofia [...].⁶⁶

Vale lembrar o esforço de Isaac Newton para descrever matematicamente a aceleração centrípeta no Livro I. Ao deduzir à sua maneira⁶⁷ aquela aceleração, Newton consegue enfatizar claramente, com a linguagem matemática, a relação importante entre a Lei da Inércia e o conceito de “aceleração”: se um corpo tende a manter-se em movimento retilíneo e com velocidade de módulo constante, então, ao executar uma curva, ele o faz por ter sido “acelerado”. Importante lembrar aqui que o conceito de “aceleração” envolve a “mudança” em *qualquer* atributo da velocidade, isto é, “acelerar” pode significar “mudar a intensidade da velocidade”, mas, também, significa “mudar a direção do movimento”; assim, não foi sem motivo que Newton esforçou-se por descrever matematicamente a aceleração centrípeta: a aceleração que mede exatamente a variação de direção da velocidade!

⁶⁶ Ibidem, p. 183-184.

⁶⁷ Veja o apêndice 1.

IV. O AMBIENTE COMUNITÁRIO NA PRODUÇÃO CIENTÍFICA

É possível traçar uma linha de evolução do pensamento científico desde a Grécia antiga, tradicionalmente marcada, essencialmente, por cinco períodos, a saber: o período pré-homérico (XX a.C. – XII a.C.), o período homérico (séc. XII – VIII a.C.), o período arcaico (séc. VIII - VI a.C.), o período clássico (séc. V-IV a.C.) e o período helenístico (séc. IV – II a.C.). No período homérico, notamos a percepção de um mundo organizado através de uma perspectiva mitológica, na qual a racionalização ao redor dos deuses e mitos era estendida para o mundo dos homens⁶⁸. O período arcaico, caracterizado, principalmente, pelo fato de a civilização grega ter sua vida orbitando ao redor das *poleis* (cidades-Estado) teria criado condições⁶⁹ para que o conhecimento fosse aprimorado racionalmente. É nesse período que encontramos Tales e Pitágoras. Teria sido no período arcaico que se acentuou a percepção de que o mundo exibe alguma racionalidade e é possível investigá-la. O período clássico teria sido aquele no qual algumas cidades-Estado (como Atenas) atingiram seu mais alto grau de desenvolvimento. É em Atenas que encontraremos Platão e Aristóteles; deste, o ocidente herdaria a cosmovisão na qual o mundo teria em seu centro o planeta Terra; daquele, o Ocidente herdaria a dicotomia entre os mundos real e ideal (em cujo “lugar” a matemática prevalecia). É com pensadores como Sócrates, Platão e Aristóteles que ficará profundamente marcada a concepção de que o conhecimento só pode avançar sobre um pensamento metodológico⁷⁰, o saber só pode aumentar a partir de uma investigação organizada. No período helenístico, veremos a submissão das cidades gregas ao Império Macedônio e o espalhamento da cultura grega através do império. Teria sido nesse período que a unidade do saber foi rompida, pois ali se assistiu à separação entre filosofia e ciência, evento ilustrado pelos polos Atenas e Alexandria, como centros de difusão da filosofia e da ciência, respectivamente⁷¹. O legado intelectual grego será absorvido e o conhecimento se desenrolará através de uma série de pensadores nos séculos posteriores como, por exemplo, Cláudio Ptolomeu (90 d.C. – 168 d.C.) Santo Agostinho (354 d.C. – 430 d.C.), Avicena (980 d.C.), Gerardo de Cremona (1114 d.C - 1187 d.C.), Averrois (1126 d.C – 1198 d.C.), Robert Grosseteste (1175 d.C – 1253 d.C.), Roger Bacon (1214 d.C. – 1294 d.C.), Tomás de Aquino (1225 d.C – 1274 d.C.), Thomas Bradwardine (1290 d.C. – 1349 d.C.), Nicole Oresme (1323 d.C. – 1382 d.C.), Nicolau de Cusa⁷² (1401d.C. – 1464 d.C.), Pierre Gassendi

⁶⁸ ANDREY, pág. 29.

⁶⁹ Ibidem, p. 35.

⁷⁰ Ibidem, p. 57.

⁷¹ Ibidem, p. 98.

⁷² É possível pensar em Nicolau de Cusa como aquele que inaugura o processo de substituição da cosmologia aristotélica pela cosmologia moderna. Veja ANDREY, p. 187 citando Koyré.

(1592 d.C. – 1655 d.C.), Marin Mersenne (1588 d.C. – 1648 d.C.), Ismaël Bullialdus (1605–1694), Christiaan Huygens (1629 d.C. – 1695 d.C.), Robert Hooke (1635 d.C. – 1703 d.C.). É interessante perceber que o desenrolar da produção científica apresenta um estado de transição, isto é, de permanente mudança e evolução, e que tal característica está associada tanto ao aprimoramento das ideias em um mesmo cientista (como exemplo lembremo-nos - no capítulo 3 - dos modelos matemáticos nos quais Newton pensou e pelos quais transitou para deduzir a intensidade de sua força centrípeta), quanto à “interlocução” dele com o restante da comunidade científica. Há de se frisar aqui que “interlocução” não significa necessariamente diálogo entre dois cientistas contemporâneos, mas a troca de ideias, na medida em que um cientista pode ler a obra de outro: por exemplo, Newton – nascido aproximadamente 12 anos depois da morte de Kepler - teria tido contato com suas ideias⁷³ através de um manual de astronomia – o *Astronomia carolina* de 1661- escrito por Thomas Street (1621 d.C. – 1689 d.C.), de modo que teve acesso ao pensamento kepleriano e, nesse sentido, podemos dizer que Newton “dialogou” com Kepler. Ilustraremos esse aspecto de “interlocução científica” em Isaac Newton com quatro exemplos dados a seguir.

Exemplo 1: a interlocução entre Newton e Descartes

John Harris⁷⁴, autor de *Lexicon Technicum* (1704), define o vocábulo “hipótese” como uma suposição aceita para, a partir dela, propiciar uma explicação inteligente e plausível. Assim, para Harris, uma hipótese não precisa necessária e exatamente ser verdade, mas levar a uma descrição da natureza que “funcione”, ou seja, uma descrição coerente com aquilo que se observa. É possível perceber essa evolução no pensamento newtoniano. Exemplo disso é dado pelo Profº Eduardo Barra⁷⁵, quando indica uma mudança de tratamento para com as segunda e terceira leis de Kepler, se comparadas a primeira edição (1687) com a terceira e última edições (1726) dos *Principia*; na última edição do século XVIII, as duas leis de Kepler citadas aparecem como partes dos “fenômenos”, enquanto na edição do século XVII as mesmas duas leis aparecem como “hipóteses”. O uso desse termo para as duas leis seria indicativo de que Newton escreveu com a mentalidade característica da astronomia do século XVII (a primeira edição é de 1687), segundo a qual a palavra “hipótese” define uma afirmação não que não precisava representar o sistema solar real, necessariamente. Lembremo-nos de que a sugestão de Copérnico de pensar os planetas orbitando ao redor do

⁷³ BARRA, 1994, p. 55.

⁷⁴ Ibidem, p. 123.

⁷⁵ Ibidem, p. 123.

sol facilitava os cálculos para previsão das posições dos planetas, o que não significava necessariamente que a natureza fosse assim. Uma coisa é “representar”, outra coisa é “ser”; essa era a mentalidade do século XVII. O uso do modelo copernicano por Erasmus Reinhold é um exemplo disso. Jean Verdet nos informa que o modelo copernicano, no qual o Sol aparece no centro ou perto do centro do sistema solar, foi usado pela primeira vez, por Erasmuns Reinhold (1511 d.C – 1553 d.C.) - famoso exatamente por sua habilidade em calcular - para calcular e prever posições dos planetas. Seus resultados foram publicados em 1551, isto é, cerca de oito anos depois da publicação por Copérnico da obra *De revolutionibus orbium coelestium*, e os bons resultados de Reinhold teriam sido uma excelente propaganda do modelo copernicano⁷⁶. Mas, apesar de ter usado tal modelo para fazer seus cálculos, Verdet nos mostra que Erasmus Reinhold não era um heliocentrista convicto: afinal, para a mentalidade da época, uma tarefa é prever com mais exatidão a posição de um planeta, outra coisa é definir como os planetas estão, de fato, dispostos e como se deslocam no céu:

[...] As tábuas astronômicas, e até os capítulos de astronomia prática do *Almagesto* ou do *De revolutionibus*, são ferramentas de cálculo cuja prática não implica a escolha de uma cosmologia⁷⁷: tratar da natureza das esferas celestes, da ordem de sua sucessão no universo, do poder que elas têm umas sobre as outras é uma coisa, dar com a melhor precisão possível a posição dos planetas no céu é outra [...].⁷⁸

O confronto de ideias – que, às vezes, infelizmente, torna-se um confronto de pessoas - produz ajustes, adaptações, aprimoramento. Aparentemente, Newton teria escolhido, depois da primeira edição dos *Principia*, chamar à segunda e à terceira leis de Kepler de “fenômenos” e não “hipóteses”, pois, logo após a primeira edição, uma resenha de sua obra foi publicada no *Journal de Sçavans*, em 8 de janeiro de 1688, maculando o trabalho de Newton; a mácula se justificaria na medida em que Newton havia usado as leis de Kepler meramente como representações, abstratas sem veracidade física, real, fato detectável pelo resenhista anônimo ao ler as leis de Kepler chamadas de “hipóteses”. Isso poderia caracterizar o “modelo de mundo” proposto por Newton apenas como recurso matemático de aproximação que facilitasse os cálculos e não a descrição real da natureza. Vale aqui citar o Profº Eduardo Barra:

Quanto às leis de Kepler, o mais importante é que no Livro III, seja como “Hipóteses” seja como “Fenômenos”, elas deixam de ser tratadas matematicamente no âmbito restrito de um sistema ou modelo idealizado, e passam a desempenhar a

⁷⁶ Das revoluções das esferas celestes.

⁷⁷ Cosmologia: o estudo da natureza, origem e evolução do universo. ISAACS, 1996.

⁷⁸ VERDET, 1991, p. 91-92.

função de expressar a regularidade aparente dos movimentos planetários. Nesse sentido, elas descrevem os principais fenômenos que a teoria gravitacional de Newton pretende explicar...⁷⁹

Embora seja possível colocar Newton e Descartes juntos numa escola de pensamento chamada pela filosofia de “mecanicismo”, é fato que Newton se afastou do pensamento cartesiano em aspectos fundamentais. Um deles para o qual chamamos a atenção é a característica cartesiana de escolher princípios apriorísticos como “princípios físicos”. O adjetivo “apriorístico” vem da expressão “*a priori*” cujo significado é oposto ao significado da expressão “*a posteriori*”. O que é “saber algo *a priori*” e o que significa “saber algo *a posteriori*”? “Saber algo *a priori*” é saber algo “somente através da razão”, sem necessidade de testar, ou verificar se aquilo que se sabe seja, de fato, assim; por exemplo, “sabemos *a priori*” que todos os retângulos que existem ou poderiam existir são polígonos de quatro lados, que apresentam quatro ângulos de igual medida: não é necessário que verifiquemos todos os retângulos, ou que tenhamos a experiência de ter contato com todos os retângulos para sabermos da veracidade de tal afirmação. Por outro lado, “saber algo *a posteriori*” é conhecer algo “a partir da experiência”; por exemplo, podemos saber se há sol ou se está chuvoso hoje, porque podemos através de nossos olhos, ter a experiência de enxergar o sol ou ter a experiência de detectarmos a chuva pelo sentido do tato. É consenso entre os historiadores e filósofos da ciência que René Descartes pretendeu estabelecer os princípios de sua física deduzindo-os de princípios auto evidentes que seriam conhecidos, inicialmente, apenas pelo intelecto, pela mente antes de qualquer experiência! Ou seja, Descartes esperava que experimentos apenas confirmassem algo que a mente humana já soubesse “*a priori*”. Assim, para Descartes a “tendência retilínea dos movimentos” – parte da afirmação que aprendemos como lei da Inércia - era uma informação “*a priori*” e seria apenas “confirmada” pela experiência. Isaac Newton apresentou uma postura oposta e sustentava o seguinte lema: “deduzir dos fenômenos e tornar geral pela indução”⁸⁰. Descartes esperava que a experiência confirmasse leis físicas compreendidas pelo intelecto humano antes de o cientista realizar experimentos, enquanto Newton esperava que os experimentos – matematicamente estudados – determinassem as leis físicas. Descartes colocava a razão pura anterior à experiência; Newton colocava a experiência como juíza da razão. Para Descartes, a razão julgava a experiência; para Newton a razão era julgada pela experiência. Para Descartes, se um experimento conduzisse a resultados diferentes dos resultados esperados pela razão, então o experimento estava errado. Para Newton, se um experimento conduzisse a resultados

⁷⁹ BARRA, 1994, p. 124. Grifos nossos.

⁸⁰ Idem.

diferentes dos esperados pela razão, então a razão deveria se adequar à experiência. Eis aqui um ponto em comum entre Newton e Galileu Galilei, que os afastava de Descartes: embora os três acreditassem na Matemática como linguagem essencial da natureza, através de experimentos o cientista deve descobrir a que leis matemáticas a natureza obedece.

Exemplo 2: a interlocução entre Newton, Gilbert, Kepler, Bullialdus, Galileu e Hooke

Galileu encontrou uma nova concepção de movimento para objetos sobre a superfície terrestre ao insistir na ideia de geometrizar o espaço. Ao geometrizar o espaço para estudar o movimento, Galileu teria esbarrado na lei da Inércia, que seria formulada explicitamente por René Descartes. É interessante pensar que, ao escolher um tratamento matemático para o estudo do movimento – em oposição ao estudo não matemático, mas apenas qualitativo de Aristóteles – Galileu criou condições para destruir objeções ao sistema de Copérnico, mostrando, implacavelmente, a impossibilidade de estudar a natureza apenas qualitativamente, como pretendia Aristóteles. Quem se fiasse na abordagem qualitativa aristotélica, isto é, quem insistisse em não estudar matematicamente os fenômenos, jamais encontraria uma nova física para a época (uma física que substituísse a física aristotélica), que explicasse melhor o movimento⁸¹. A postura de Galileu era a de que, ao matematizar os movimentos, ao descrevê-los com linguagem matemática, descrevia-se a natureza como ela de fato é, como concretamente ela é, e não de maneira apenas abstrata. Para Galileu – diferentemente de Aristóteles –, pensar logicamente é necessário, mas não suficiente para descobrir as leis que regem a natureza. Ir além era quantificar os fenômenos e perceber as relações matemáticas entre as quantidades envolvidas⁸².

Enquanto Galileu foi capaz de formular leis que descrevessem os movimentos de objetos próximos à superfície terrestre, Kepler foi capaz de formular leis que descreviam o movimento para os astros. Copérnico havia proposto um modelo (no qual uma das características é o Sol ser circundado pelos demais planetas) baseado em poucas observações e observações não tão rigorosas. A ideia de que os planetas, inclusive a Terra, giravam ao redor do sol provou-se correta. Por outro lado, as observações de Tycho Brahe – bem melhores que as observações feitas até então – proporcionaram uma base sólida para o trabalho de Johannes Kepler. Este ultrapassou Tycho em seus resultados, mas somente o fez por ter baseado sua investigação nas observações deste último, observações do céu mais

⁸¹ ANDERY 2014, p. 189.

⁸² Ibidem, p. 191.

acuradas do que aquelas que até então tinham sido feitas. Kepler fez o conhecimento avançar com suas três leis. Todavia, os comentadores não deixam de lembrar que tanto Copérnico como Kepler, apesar de terem o mérito de terem feito descobertas corretas sobre o céu, teriam envolvido razões mais místicas do que científicas em seus raciocínios⁸³.

William Gilbert (1544 d.C. – 1603 d.C.) registrou, em 1600, na sua obra *De magnete* (“Sobre o magnetismo”), o fato de que a intensidade da força magnética varia com a distância⁸⁴. Kepler (1571 d.C. -1630 d.C.), tendo abraçado o copernicanismo e tendo em mente a força magnética de William Gilbert, propôs que o Sol exerce alguma força sobre os planetas, obrigando-os a executarem movimento ao redor dele; ele chega a escrever que “Os planetas são imãs e são impulsionados pelo Sol por meio da força magnética”⁸⁵. Segundo Max Jammers, inicialmente Johannes Kepler havia pensado na hipótese segundo a qual a força exercida pelo sol sobre um planeta é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o sol e o planeta. Todavia, em seguida, descartou tal ideia, pois “a seu ver, as forças de atração não se espalhavam pelo espaço em todas as direções, como exemplificado pela lua, mas só no plano dado pelas órbitas planetárias”⁸⁶. Por outro lado, Ismael Boulliau⁸⁷ (1605 d.C. – 1694 d.C.), após ler Kepler, além de discordar quanto à proposta de que haveria uma força exercida pelo sol sobre qualquer planeta, criticou-o por sugerir que, se tal força houvesse, sua intensidade seria inversamente proporcional à distância: para Boulliau, tal força - se existisse - deveria obedecer à lei do “inverso do quadrado”, isto é, se houvesse uma força do Sol sobre os planetas, a intensidade de tal força deveria desvanecer proporcionalmente ao quadrado da distância entre o Sol e tal planeta. O argumento de Boulliau se baseava no argumento puramente geométrico descrito no apêndice 2, que é o argumento para estimar a intensidade de propagação da luz no espaço a partir de uma fonte puntiforme. Por analogia com a luz que se propaga no espaço – e não só no plano –, podemos pensar com Boulliau que “qualquer coisa” que se propague pelo espaço deveria ter o mesmo comportamento matemático que a luz! Boulliau teria dito que Kepler propôs uma força “imaginária, sem apoio dos fatos”. De fato, Jammers continua, foi Boulliau quem descartou tal força ignorando a experiência e simplesmente apoiado em um dogma aristotélico⁸⁸. Chama a atenção, no desenvolvimento da ciência, “quanto” e “como” ideias preconcebidas atrapalham e são deixadas para trás. Kepler pensou numa “lei do inverso do quadrado” para a

⁸³ ANDERY, 2014, p. 187.

⁸⁴ GREASE, 2011, p. 62.

⁸⁵ JAMMER, 2011, p. 120.

⁸⁶ Ibidem, p. 121.

⁸⁷ Ou Ismael Bullialdus.

⁸⁸ JAMMER, 2011, p. 123.

ação do Sol sobre os planetas, mas desistiu. Boulliau propôs aquilo que Newton descobriria, mas descartou movido pela sua posição filosófica. Por outro lado, foi refletindo também a partir de convicções filosóficas que se provaram equivocadas que Kepler alcançou suas três leis, fundamentais para o trabalho de Newton. Hooke esbarrou na lei gravitacional, mas não a deduziu⁸⁹, embora, aparentemente, sua provocação teria sido importante para levar Newton a encontrá-la⁹⁰.

Posto o que vai nas linhas anteriores, não é estranho ler de Richard Westfall que, quando Wren, Halley e Hooke conversaram no segundo semestre de 1686, havia, entre os pensadores da época, a desconfiança de que poderia haver, de fato, uma atração sobre os planetas a partir do Sol que obedecesse à “regra do inverso do quadrado”. Foi nesse contexto histórico-intelectual que Hooke teria sugerido tal relação matemática para Newton através de uma carta. É normal lermos os filósofos e historiadores da ciência discutindo a respeito da contribuição de Hooke ao trabalho de Newton na descoberta da lei de atração universal. Westfall acredita que Robert Hooke – apesar de a sugestão, através de uma carta, da “lei do inverso do quadrado” ser um fato - não foi capaz de vislumbrar que tal lei apontava para um sistema matemático geral do universo, feito importantíssimo e perfeitamente executado por Isaac Newton⁹¹. Uma situação, por exemplo, que revela que Hooke não teria encontrado a força de atração gravitacional⁹² foi o fato de ter aceitado um resultado equivocado de Kepler, a saber, que a velocidade de um planeta seria, em cada ponto da trajetória, inversamente proporcional a sua distância do Sol. Tais comentários, se tomados isoladamente, desenhavam um quadro sombrio de Robert Hooke como cientista, mas sua importância na história da ciência, segundo Alexander Koyré, merece uma análise para o desenvolvimento da ciência digna de seu trabalho que não teria sido pequeno⁹³. Para sustentar tal afirmação, Koyré cita, como exemplo da relevância de Hooke, a proposta de um modelo mecânico “extremamente engenhoso” formulado por ele na tentativa de explicar a razão da lei gravitacional descoberta por Newton.

Isaac Newton: ele cristaliza um processo, já observado em Kepler e Galileu, de assumir a matemática, não como mero instrumento de cálculo, mas como a essência da natureza. Enquanto Galileu assumia a premissa de que os movimentos sobre a superfícies

⁸⁹ KOYRÉ, 1968, p. 183.

⁹⁰ BARRA, 1994, p. 33.

⁹¹ WESTFALL 2008, p. 451.

⁹² KOYRÉ, 1968, p. 180.

⁹³ Ibidem, p. 184.

terrestre eram norteados por comportamento matemático, Kepler aplicou tal concepção ao Céu. Em Kepler, entre cosmologia e astronomia⁹⁴ não há mais a dicotomia na qual a primeira era vista como a descrição exata de como o mundo “é”, enquanto a outra era construída com os melhores “modelos” matemáticos possíveis. Nessa afirmação, o vocábulo “modelo” carrega em si a concepção de que “independente da verdade ou falsidade”⁹⁵ da “representação” que o modelo sugere, o que importava eram os resultados práticos, a saber, as previsões quanto à posição dos planetas. Até o trinômio “Kepler/Galileu/Newton”, a matemática poderia ser vista apenas como “ferramenta de cálculo”. Com Newton, a ideia de que a “*phísis*”⁹⁶ (não só a terra, não só o céu, mas ambos, isto é, a natureza toda, o “mundo”) é, não apenas representada matematicamente, mas essencialmente matemática, de modo que, se descobertas as leis matemáticas que a regem, então a compreenderemos perfeitamente e, sendo a natureza perfeitamente inteligível, tornamo-nos capazes de manuseá-la, o que significa capacidade de controle e previsão.

Exemplo 3: a interlocução entre Newton, Bacon

Francis Bacon⁹⁷ nasceu em 1561 d.C. e faleceu em 1626 d.C., isto é, cerca de 17 anos antes do nascimento de Isaac Newton. Bacon não foi um cientista no sentido que atribuímos à palavra atualmente, isto é, não foi alguém que entregou algum resultado ou publicou alguma pesquisa sobre as ciências naturais. Ele era jurista e ocupou vários cargos públicos. Sua importância para as Ciências Naturais é marcante por conta de insistir, essencialmente, em duas ideias. Primeiro: a natureza só pode ser estudada a partir de experimentos devidamente controlados. Segundo: o conhecimento sobre a natureza só pode se dar por indução.

Bacon escreveu uma obra chamada *Novum Organum*, na qual ele sustentava que o conhecimento científico só pode ser alcançado se houver um método adequado a tal objetivo. Antes de expor seu método, ele justificou sua necessidade. Segundo Bacon, há quatro tipos de erros que podem ser cometidos ao se estudar a natureza. O primeiro tipo são aquelas falhas associadas ou às habilidades sensoriais ou ao intelecto, de modo que podem ser pensadas como erros possíveis devido à natureza do homem. O segundo tipo de erro é aquele provocado pelas características individuais do pesquisador. O terceiro tipo de erro está

⁹⁴ TOSSATO, 2003, pp. 235, 237 e 238.

⁹⁵ Ibidem, p. 235.

⁹⁶ Palavra grega para “natureza” da qual surgiu nosso vocábulo “física”.

⁹⁷ Não confunda com Roger Bacon (1214 d.C. – 1294 d.C.) falecido mais de três séculos antes de Francis Bacon. Roger Bacon talvez tenha sido o primeiro pensador a tentar tratar matematicamente o conceito de “força”, conceito fundamental para Isaac Newton desenvolver seu pensamento e encontrar a força de atração universal. Veja TOSSATO, 2003, p. 97 e JAMMER, 2011, pp. 82-93.

vinculado à deficiência ou insuficiência na linguagem ou na comunicação⁹⁸ dos resultados experimentados. E, finalmente, o quarto tipo de erro são aquelas falhas que surgem por conta de pressupostos teóricos⁹⁹ errados¹⁰⁰. A solução, para Bacon, era formular teorias baseadas na experimentação e no método da indução. “Induzir” é formular uma nova afirmação a partir de um primeiro enunciado, mas uma nova afirmação cujo conteúdo não necessariamente está integralmente contido no primeiro enunciado. Assim, Bacon propõe que, para se extrair alguma regra de comportamento da natureza, para obtermos uma “lei natural” é necessário que um grande número de experimentos sejam realizados de modo organizado e os dados cuidadosamente medidos para deles extrair algum padrão. Num processo contínuo e gradativo de experimentação cuidadosamente observada, a formulação de padrões permitiria a formulação de “princípios” que revelassem o comportamento da natureza. Citando o próprio Bacon:

Só há e só pode haver duas vias para a investigação e para a descoberta da verdade. Uma, que consiste no saltar-se das sensações e das coisas particulares aos axiomas mais gerais... A outra, que recolhe os axiomas dos dados dos sentidos e particulares, ascendendo contínua e gradativamente até alcançar, em último lugar, os princípios de máxima generalidade. Este é o verdadeiro caminho...¹⁰¹

Newton, como legatário desse modo de pensar de Bacon, escreveu:

Na filosofia experimental, devemos considerar as proposições inferidas pela indução geral a partir dos fenômenos como precisamente ou muito aproximadamente verdadeiras...¹⁰²

Newton explicitamente cita o método da indução como ferramenta usada por ele para investigar e descobrir como a natureza se comporta. Vale destacar que a “indução” pensada por Newton está mais próxima do conceito de “indução” de Bacon do que do conceito de “indução” de Aristóteles¹⁰³: enquanto este propunha formular leis a partir da observação vaga, ampla, não detalhista da natureza, Bacon propõe formular leis a partir de análise minuciosa de uma quantidade grande de experimentos controlados. Ao acompanhar os *Principia*, vemos que esse foi um cuidado tomado por Newton ao percorrer seu caminho de investigação que o leva à Lei de Atração Universal.

⁹⁸ Difícil não pensar aqui na suficiência da linguagem matemática para expressar informações em Ciências Naturais.

⁹⁹ Por exemplo, seria difícil encontrar a Lei de Atração Universal a partir de Ptolomeu ao invés de Kepler.

¹⁰⁰ Esses quatro tipos de erros na pesquisa científica foram chamados metaforicamente por Bacon de “ídolos”: na ordem que descrevemos eles são chamados, respectivamente, de ídolos da tribo, ídolos da caverna, ídolos do foro e ídolos do teatro. Veja ANDERY, 2014, p. 195.

¹⁰¹ ANDERY, 2014, p. 197, grifos nossos.

¹⁰² NEWTON, 2008, p. 187.

¹⁰³ Veja ANDERY, 2014, p. 198.

Exemplo 4: a interlocução entre Newton, Huygens, Faraday, Maxwell e Einstein

O trabalho de Newton na busca pela força gravitacional, apesar de ser um enorme sucesso, não foi um trabalho definitivo. Chama a atenção de quem lê os *Principia* que seu autor não faz questão de dizer “como” a força gravitacional atua sobre o planeta, ou falando de outra maneira, Newton não faz questão de identificar a “borda sólida” (figura 6, página 41) em “formato circular” que exerce constantemente a força centrípeta sobre o planeta, obrigando-o a executar a trajetória circular. Essa seria a resposta à pergunta “Qual a natureza da força gravitacional?” ou “O que é a força gravitacional?”. Num ambiente onde a cosmovisão ainda não dava espaço à ideia de forças “de campo”, tal pergunta se manteve sem resposta, como podemos ver no seguinte excerto de Florian Carjori:

[...] Questões de causa e efeito têm interessado os filósofos de todos os tempos... Newton está entre os primeiros cientistas a incutir confiança na existência de um sistema compreensivo de causalidade nos fenômenos físicos... Mas em seus *Principia* Newton não ousou fazer sugestões sobre a causa da gravidade... Escritos tão ultra-especulativos são encontrados em suas cartas para Richard Bentley e Robert Boyle..., mas seriam inadequados nos *Principia*, um trabalho objetivando uma adesão estrita a fatos experimentais e a uma dedução matemática rigorosa a partir deles [...] ¹⁰⁴

Newton optou por apenas publicar a relação matemática (a lei matemática de atração universal) da força gravitacional verificável na “natureza” e não discutir a natureza do seu objeto, reconhecendo a dificuldade de se fazer isso: discutir “o que algo é” envolve uma investigação metafísica¹⁰⁵. Segundo Max Jammer¹⁰⁶, Christian Huygens teria tido a mesma postura até 1690 com o binômio “força centrífuga¹⁰⁷/ força gravitacional”, e com Newton não foi diferente, no seu tratamento da força gravitacional. Sobre a natureza da força gravitacional em Newton, podemos ler em suas próprias palavras:

[...] Explicamos até aqui os fenômenos dos céus e de nosso mar pelo poder da gravidade, mas ainda não designamos a causa deste poder... ainda não fui capaz de descobrir a causa destas propriedades da gravidade a partir dos fenômenos, e não construo hipóteses. Pois tudo aquilo que não é deduzido a partir dos fenômenos é para ser chamado de hipótese. E as hipóteses, quer metafísicas ou físicas, quer de qualidades ocultas ou mecânicas, não tem lugar na filosofia experimental [...] ¹⁰⁸

¹⁰⁴ NEWTON, 2008, pp. 436-437.

¹⁰⁵ Newton foi capaz de “descrever” a força gravitacional no sentido segundo o qual ele a “expressou quantitativamente” em função das massas envolvidas e da distância entre elas, mas, ser capaz disto não é o mesmo que encontrar resposta à questão “Por que massas se atraem?”. Newton deu uma resposta “física”, mas não ousou em sua obra registrar resposta a esta última questão “metafísica”.

¹⁰⁶ JAMMER 2011, p. 147.

¹⁰⁷ É bom lembrar nesse contexto de transição de ideias que a mesma expressão matemática (v^2/R) para Newton estava relacionada com a expressão de uma força centrípeta, enquanto para Huygens estava relacionada com a expressão de uma força centrífuga.

¹⁰⁸ NEWTON 2008, p. 331.

Por volta de Julho de 1689, Huygens, em sua única visita à *Royal Society* de Londres, falou sobre sua teoria turbilhonar da gravitação – incompatível com o modelo newtoniano - na presença de Newton. E, em 1690, encontraremos a publicação de um tratado de Huygens discorrendo sobre a natureza da gravitação, sustentando um ponto de vista diferente de Newton (23 anos após a publicação da primeira edição dos *Principia*) num tempo em que as posições newtonianas já desfrutavam de sucesso entre a comunidade científica. O discurso de Huygens em 1689 (lembre-se: posterior à publicação dos *Principia*), e a publicação de seu tratado em 1690 são exemplos em História da Ciência de um fato: há um processo – e não um único momento - de absorção de um novo resultado científico pela comunidade de cientistas, pois é necessário que tais pensadores confrontem aquilo que conhecem com tal resultado, na tentativa de entendê-lo, admiti-lo e, então, assimilá-lo. Hoje, aprendemos nos cursos médios de física clássica que a força de atração gravitacional é uma “força de campo”¹⁰⁹, em contraste com as chamadas “forças de contato”. A concepção de “forças de campo” seria uma aberração nos tempos de Newton: notemos que os filósofos da ciência de então passaram a admitir com a obra de Newton que os corpos se atraíam com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância, mas não entendiam “como” isso acontecia (como admitimos hoje com “tanta naturalidade”), pois lhes era inconcebível que corpos distantes um do outro não atuassem, “através de contato” um sobre outro, através de corpos menores¹¹⁰.

A ideia de campo gravitacional aparece antes da ideia de campo elétrico nos livros didáticos de física para o Ensino Médio no Brasil. Historicamente, o conceito de “campo gravitacional” apareceu depois da ideia de “campo” nascer com o desenvolvimento da ideia de “campo eletromagnético”¹¹¹. Faraday formularia qualitativamente uma “teoria de campo” e Maxwell, na sequência, daria uma formulação mais adequada¹¹² da teoria de campo através de derivadas parciais¹¹³, no início da década de 1860.

É com a teoria da relatividade geral¹¹⁴ em 1915, cerca de 50 anos depois da teoria de campo eletromagnético de Maxwell, que surgirá a ideia de “campo gravitacional”. Einstein,

¹⁰⁹ Forças de Campo são aquelas para cuja existência o contato entre os corpos que interagem é desnecessário: são três as forças de campo no ensino médio, a saber, a Força Gravitacional (atração entre massas), a Força Elétrica (atração ou repulsão entre cargas elétricas) e a Força Magnética (atração e repulsão entre polos magnéticos).

¹¹⁰ Daí a necessidade de admitir a existência do “éter”, que seria experimentalmente demonstrado não existir somente em 1887 (com o famoso experimento de Michelson-Morley), ou seja, mais de duzentos anos depois da publicação dos *Principia*!

¹¹¹ SCHENBERG, 2001, pp. 108-109.

¹¹² Ibidem, p. 114.

¹¹³ “derivadas parciais” é um dos tópicos do Cálculo Diferencial e Integral aprendido pelos alunos de cursos nas áreas exatas nos primeiros anos de sua formação.

¹¹⁴ SCHENBERG, 2001, p. 109 e p. 118. É extremamente interessante perceber que dos Princípios de Newton até a gravitação de Einstein, a teoria da gravitação foi lentamente melhor elaborada com instrumentos matemáticos cada vez melhores. Schenberg já nos lembra, na página 140 que o matemático Laplace – nascido 22 anos depois da morte de Newton - reescreve a teoria de gravitação newtoniana afastando-se de muitos pontos do pensamento original de Newton.

com equações derivadas parciais e a geometria de Riemann, reformularia a teoria de gravitação clássica nascida em Newton. Como se pode notar, a sequência da matéria em manuais básicos de física do Ensino Médio é logicamente correta, mas não o é historicamente adequada¹¹⁵. Cabe destacar aqui que, rigorosamente falando, sabemos, desde Einstein, que a Teoria de Gravitação Newtoniana está incorreta¹¹⁶, ou, dito de maneira mais suave, a Teoria de Gravitação Newtoniana é apenas uma aproximação de “como as coisas, de fato, são”.

A Comunidade Científica e a evolução da Ciência

A partir dessa pequena apresentação da Lei da Gravitação Universal, e fazendo uma breve referência à história subjacente à sua “descoberta”, é possível discutir o valor de uma Teoria para os cientistas. Assumindo que teoria é “... um conjunto de leis, conceitos e modelos que explica uma ampla classe de fenômenos”¹¹⁷, é possível pensar que há uma característica importante e marcante em Ciências Naturais: velhas teorias tendem a ser “englobadas” por novas teorias. A necessidade de novas teorias surge quando novos fenômenos ainda não explicados por alguma teoria vigente exigem compreensão. Tal característica é muito bem exemplificada na investigação e no desenvolvimento da teoria da gravitação por Isaac Newton. Suas ideias sobre gravitação¹¹⁸ abarcam outras, isto é, sua lei de gravitação “dá conta”, por exemplo, da Lei da Queda Livre de Galileu e das três Leis de Kepler. Assim, a Lei de Atração Universal formulada por Newton é um resultado “melhor” por ser um resultado mais abrangente e mais fundamental, pois é uma afirmação sobre a natureza que se coloca como anterior às Leis de Galileu e Kepler, isto é, serve como alicerce, base de tais leis; também pode ser chamada de mais “abrangente” porque podemos tomar as Leis de Galileu e Kepler como consequências da lei newtoniana, de modo que esta abrange aquelas. Deixemos isso um pouco mais explícito:

A lei harmônica - a terceira lei de Kepler- pode ser pensada, a partir da Lei de Atração Universal, não mais como lei (no sentido de ser uma afirmação fundamental), mas como teorema (uma afirmação consequente de outra mais primitiva), posto que da Lei de Atração Universal formulada por Newton podemos deduzi-la. Tal afirmação foi exemplificada no apêndice 3. Durante o processo de desvanecimento da cosmologia aristotélica vemos o ponto alto – embora não definitivo - em Newton ao descobrir que os movimentos de uma queda de

¹¹⁵ Lembre-se do contraste entre a dedução “genial” da Lei de Atração Gravitacional que apresentamos no capítulo 1 e o trabalho árduo realmente executado por Newton para encontra-la.

¹¹⁶ FEYMANN, 1999, p. 166.

¹¹⁷ GEWADZNAJDER 2010, p. 21.

¹¹⁸ Ibidem, p. 22.

maçã ou de um satélite ao redor de um planeta são regidos pelas mesmas regras! Tentamos destacar para o leitor a conexão estabelecida por Newton de fenômenos como a órbita de alguns astros ao redor de outro (Terra/Sol, Lua/Terra, Luas Jovianas/Júpiter, etc.) e a queda de uma pedra. Dito de outro modo, Newton é o ápice do processo de transição de uma perspectiva da natureza para outra cosmovisão, ao encontrar um único conjunto de leis que governam tanto os movimentos dos astros, como os movimentos sobre a superfície terrestre: a gravitação é universal, logo, há um único mundo, uma única natureza.

As teorias são deixadas de um pensador para outro. Sócrates foi ouvido por Platão. Platão foi ouvido por Aristóteles e lido por Tomás de Aquino. Aristóteles foi lido por Ptolomeu e Averrois. Ptolomeu foi lido por Copérnico. Copérnico foi lido por Galileu e Kepler. Galileu, Kepler e Descartes foram lidos por Newton. Newton dialogou com Halley, questionou Hooke e por ele foi questionado... E, entre esses nomes, há um número enorme de tantos outros pensadores que direta ou indiretamente influenciaram Isaac Newton, que escreveu que havia sido capaz de enxergar mais longe, pois se apoiou no ombro de gigantes. Pode ter sido um elogio aos seus ascendentes intelectuais e cientistas contemporâneos ou ter sido falsa modéstia; mas há um fato que se pode pensar a partir da frase a ele atribuída: “gigantes”, em ciência, só o são quando refletem em um ambiente comunitário, de onde extraem ideias para, ao pensar nelas e a partir delas, encontrar novos resultados. Suas ideias serão julgadas por outros pensadores contemporâneos e pensadores de gerações futuras. Sob o julgamento permanente da comunidade científica, a física e as demais ciências da natureza se apresentam em transição e evolução constantes. É no confronto e na comparação de ideias, fenômenos, experimentos e teorias formuladas pelos cientistas que a Ciência é lenta e gradativamente construída. Isaac Newton faz parte dessa comunidade e, de modo especial e intenso, sua contribuição marcou a história humana.

Na apresentação deste texto, pedimos ao leitor que o lesse com um “espírito de dúvida”. Reafirmamos aqui tal desejo e, dos vários caminhos possíveis, sugerimos um caminho de leitura para aprofundar mais a discussão:

Todos os títulos sobre os quais escrevo a seguir constam na Bibliografia no final. Há livros como os de Ian Stewart que são mais leves e rápidos para uma aproximação maior com o tema. No entanto, apesar da facilidade da leitura não deixam de ser interessantes. Nessa linha, sugiro os três primeiros capítulos de Robert CREASE e os capítulos 1 e 4 de Ian STEWART. Uma opção de contato com os textos originais de Isaac Newton é guiar-se por

COHEN & WESTFALL, 2002. Sugerimos os capítulos 6, 5 e 10, nessa ordem. Os autores fazem alguns excertos dos textos originais de Newton e escrevem comentários bastante interessantes e elucidativos a partir deles. A essa altura, sugerimos que o leitor tente ler o volume III dos *Principia* (NEWTON, 2008), lendo, em primeiro lugar, seu prefácio, no qual o próprio Newton sugere como aproveitar melhor a obra.

Finalmente, para encorajar o leitor em sua caminhada intelectual, enfatizamos uma sugestão dada por George Simmons a quem leria seu livro, aplicando-a também a esta “Breve Introdução”:

Ceticismo total é o estado de espírito recomendado ao estudar este livro (ou qualquer outro similar). Não aceitem nada por fé, verifiquem todos os cálculos, não acreditem em nada a menos que tenham visto e compreendido por si mesmos.¹¹⁹

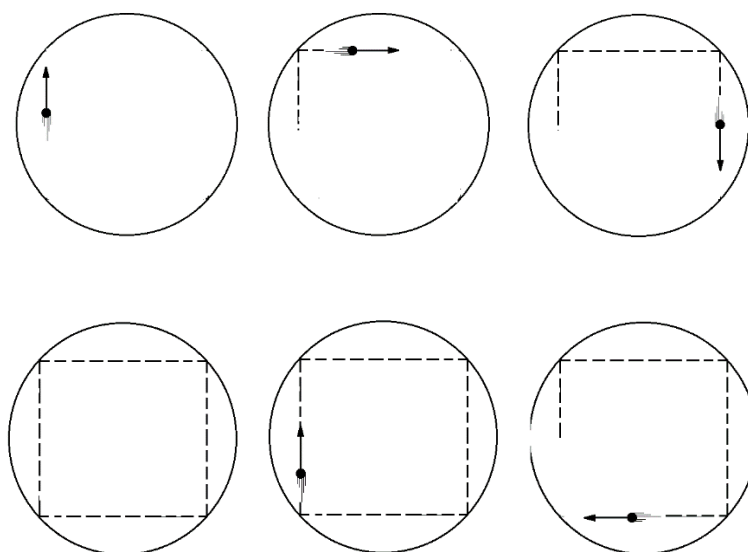
¹¹⁹ SIMMONS, 1987, p. 121, nota.

Apêndice 1: Dedução da intensidade da força centrípeta em Newton

Nas próximas linhas, tentaremos agir do seguinte modo: seguindo à maneira de Newton, segundo a qual, o que importa são proporções¹²⁰, tentaremos mostrar a relação da força centrípeta com o quadrado da velocidade e com o inverso da distância; além disso, tentaremos descrever o raciocínio de Newton em notação moderna. Esperamos assim poder fazer uma conexão entre a maneira de pensar e escrever nos tempos de Newton com a nossa notação atual para expressar ideias quantitativas.

Desprezando suas dimensões, imaginemos um corpo puntiforme se movendo com velocidade de intensidade constante sobre um plano horizontal sem atrito (ele não perderá velocidade devido à ação de uma força resistiva). Além disso, assumiremos que as colisões que ele pode sofrer são elásticas (ele não perde energia cinética, de modo que, a cada colisão, a intensidade de sua velocidade é mantida). Inicialmente, pensaremos em um movimento ao longo de uma trajetória quadrada e, posteriormente, expandiremos a análise para o movimento circular.

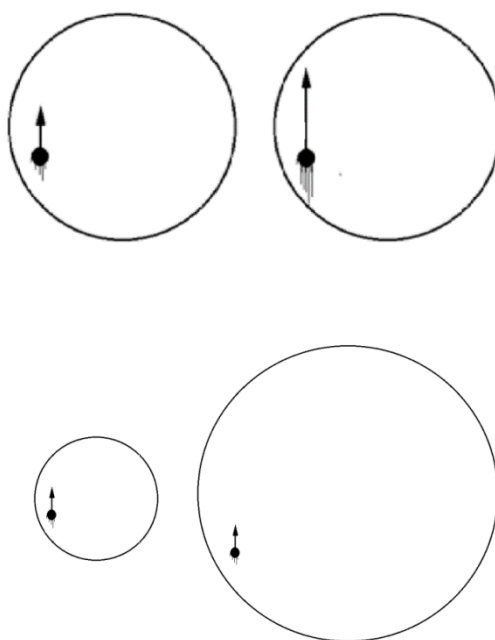
Observe o esquema a seguir, que ilustra um corpo ao longo do percurso quadrado sofrendo quatro colisões. Ao colidir com a “parede” da superfície circular, o corpo receberá um “empurrão”¹²¹ por parte da parede, de modo que a direção de seu movimento sofrerá um desvio de 90° . Chamaremos a tal empurrão de força “centrípeta”, querendo dizer com isso que o empurrão sofrido pelo corpo aponta para o centro da trajetória quadrada.



¹²⁰ Veja BARRA, 1994, p. 105, nota 49.

¹²¹ Vale lembrar aqui que a expressão mais adequada seria “força” no lugar da palavra “empurrão” que é um vocábulo coloquial.

Vamos analisar o mesmo corpo¹²² em duas situações separadamente; primeiro, buscaremos a relação entre intensidade da força centrípeta e velocidade com a qual o corpo se move e, a seguir, buscaremos a relação entre intensidade da força centrípeta e a diagonal da trajetória quadrada (que coincide com o diâmetro da parede circular). Assim, a próxima figura nos ajuda a pensar na primeira situação (na qual as “setas” desenhadas sugerem que a velocidade em um caso é maior do que no outro) e a figura seguinte nos ajudará a pensar na segunda situação (note que, enquanto as paredes circulares apresentam raios diferentes, as “setas” desenhadas apresentam mesmo tamanho, o que sugere velocidades de mesma intensidade).



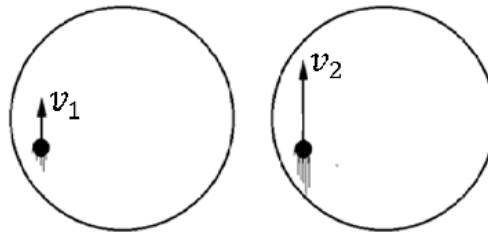
1) A relação entre força centrípeta e velocidade.

Observe o esquema a seguir. O “empurrão” sobre o corpo em movimento na colisão é proporcional à “mudança de movimento”, à variação de velocidade provocada pela colisão. Uma variação de velocidade maior implica uma colisão mais violenta, uma variação de velocidade maior sugere uma força mais intensa ou, se compararmos as duas situações descritas pelo esquema seguinte, afirmamos que a força no instante da colisão é maior onde a velocidade é maior; para provocar a mudança de 90° na direção no movimento, o “empurrão” no caso de maior velocidade será mais intenso do que o “empurrão” no caso de menor velocidade, isto é, o empurrão no primeiro caso é proporcional a v_1 e o no segundo caso o

¹²² Em linguagem moderna isto significa que, nas várias situações estudadas, as massas apresentam sempre o mesmo valor, isto é, $m_1 = m_2 = m$.

empurrão é proporcional a v_2 . Ao comparar as duas situações – conforme o método de Newton – podemos, então, dizer que a razão entre as duas forças atuantes sobre o corpo nas respectivas colisões são proporcionais à razão entre as velocidades de cada uma das situações.

Além do resultado anterior, podemos acrescentar outra análise, a saber: se as velocidades são diferentes, então o “saldo líquido”¹²³ de forças ao longo de um mesmo intervalo de tempo (a partir do qual comparamos as duas situações) depende não só do valor do empurrão em uma colisão, mas do número de vezes que as colisões acontecem – ou o número de colisões – naquele intervalo de tempo escolhido.



Podemos sintetizar a discussão nos dois parágrafos anteriores com notação matemática moderna do modo seguinte.

Para a primeira parte da análise onde o “empurrão” é proporcional¹²⁴ ao que Newton chama de “movimento”¹²⁵:

$$\frac{\text{empurrão}_1}{\text{empurrão}_2} = \frac{F_1}{F_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} \propto \frac{Q_1}{Q_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} \propto \frac{m_1 \cdot v_1}{m_2 \cdot v_2}$$

Mas havíamos assumido no início de nossa discussão que $m_1 = m_2 = m$ de maneira que podemos escrever:

¹²³ Westfall usa o termo “força total”.

¹²⁴ Onde o símbolo “ $\propto$ ” significa o mesmo que a expressão “é proporcional a”.

¹²⁵ Enquanto nós denominamos “quantidade de movimento” atualmente.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{m_1 \cdot v_1}{m_2 \cdot v_2} \\ m_1 = m_2 = m \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{m \cdot v_1}{m \cdot v_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1}{v_2}$$

Em resumo, no que diz respeito ao empurrão em cada colisão, o que dissemos até aqui pode ser escrito assim:

$$\frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1}{v_2}$$

Há cinco parágrafos atrás, também dissemos que a “força total” num certo intervalo de tempo escolhido depende do número de colisões em tal intervalo; em notação moderna podemos expressar esse resultado assim:

$$\frac{F_1}{F_2} \propto \frac{n^\circ \text{ de colisões na situação 1}}{n^\circ \text{ de colisões na situação 2}}$$

Mas, para um mesmo intervalo de tempo em que o corpo é mais veloz, ocorrerão mais colisões ou quando o corpo é menos veloz ocorrerão menos colisões, isto é, o número de colisões num certo intervalo de tempo é proporcional à velocidade com a qual o corpo percorre a trajetória quadrada; assim podemos escrever:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{n^\circ \text{ de colisões na situação 1}}{n^\circ \text{ de colisões na situação 2}} \\ \frac{n^\circ \text{ de colisões na situação 1}}{n^\circ \text{ de colisões na situação 2}} \propto \frac{v_1}{v_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1}{v_2}$$

Ora, se considerarmos as duas análises que fizemos, isto é, se considerarmos que a intensidade do “empurrão” numa colisão depende da intensidade da velocidade e que, também, depende do número de colisões num certo intervalo de tempo, podemos escrever:

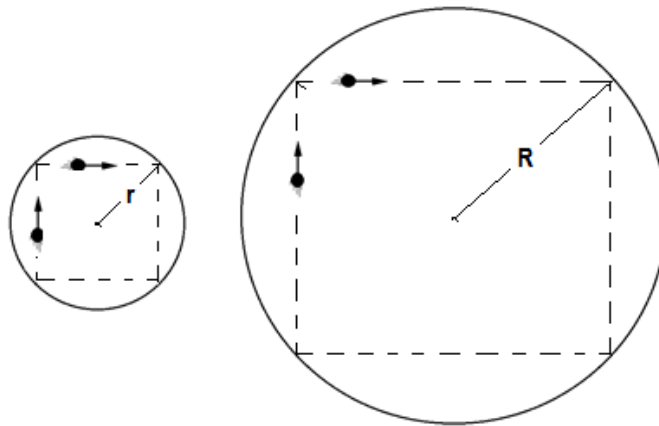
$$\left. \begin{array}{l} \text{análise 1: } \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1}{v_2} \\ \text{análise 2: } \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{n^\circ \text{ de colisões na situação 1}}{n^\circ \text{ de colisões na situação 2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1}{v_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

O que nos permite ver, em notação moderna, que, se tomarmos trajetórias quadradas de mesma dimensão¹²⁶, então, a força que obriga o corpo a desviar em 90° é proporcional ao quadrado da velocidade com a qual o corpo se move.

2) A relação entre força centrípeta e raio da trajetória

Agora, ainda na trajetória quadrada, investigaremos a relação da força experimentada pelo corpo ao mudar seu movimento de 90°, todavia, ao longo de quadrados diferentes como esquematizado a seguir. Assumiremos em ambas as situações que o corpo se move com a mesma velocidade.



No que diz respeito à intensidade de cada empurrão em função das velocidades dos corpos, comparando as duas situações, tais intensidades serão iguais, pois nos dois casos são proporcionais à mesma velocidade. Mas, para um mesmo intervalo de tempo, o número de colisões é menor para a trajetória maior; assim, a frequência de colisões na trajetória quadrada menor é maior do que a frequência de colisões na trajetória quadrada maior. Ou, dito de outro modo: a frequência de colisões é inversamente proporcional à diagonal ($d = 2.R$) da trajetória dada a mesma velocidade. Em notação moderna, podemos escrever:

$$\frac{F_1}{F_2} \propto \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{R}} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2}} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{R_2}{R_1}$$

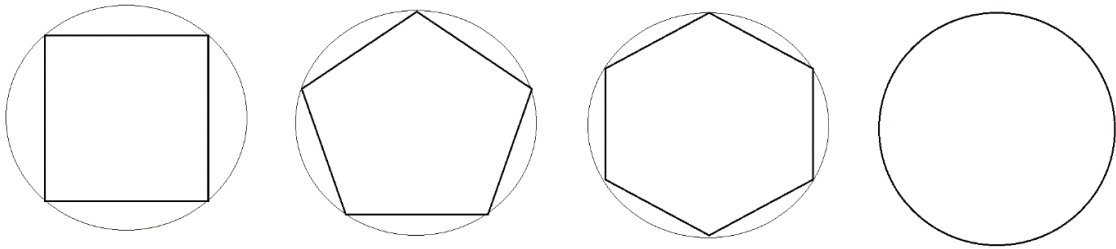
¹²⁶ Ambas as trajetórias quadradas com a mesma diagonal $d = 2.R$, onde “R” mais adiante será o raio da trajetória circular, quando o quadrado for substituído por polígonos regulares de cinco, seis, sete lados e assim sucessivamente até pensarmos no limite de um polígono com “n” lados que tende à trajetória circular se “n” tender ao infinito.

3) Conclusão

Se levarmos em conta, ao mesmo tempo, ambos os resultados das discussões feitas nos itens 1 e 2, então, poderemos escrever em notação matemática moderna o seguinte resultado:

$$\left. \begin{array}{l} \text{resultado 1: } \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1^2}{v_2^2} \\ \text{resultado 2: } \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{R_2}{R_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1^2}{v_2^2} \cdot \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} \propto \frac{v_1^2/R_1}{v_2^2/R_2} \Rightarrow F \propto \frac{v^2}{R}$$

Lembre-mos, todavia, de que toda a discussão anterior e – destaquemos - o último resultado apresentado baseado na mesma discussão vale para uma trajetória quadrada. É tempo agora de generalizar, ao estilo newtoniano, esse resultado para uma trajetória circular. As figuras seguintes nos ajudarão a visualizar o raciocínio.



Imaginemos o corpo se movendo ao longo de trajetórias descritas por outros polígonos regulares, como uma trajetória pentagonal, uma trajetória hexagonal e assim sucessivamente. Se prolongarmos esse raciocínio, perceberemos que, à medida que imaginamos trajetórias com mais e mais lados, o formato de tais trajetórias se aproxima mais e mais de uma trajetória circular. Assim, no lugar de a força estar concentrada apenas em quatro pontos, ela estará distribuída ao longo da superfície toda; agora, a distância entre o centro da trajetória quadrada e o ponto de colisão na parede - que era dada por R - será a distância radial da trajetória circular. Finalmente, é preciso destacar que a soma de todos os “empurrões” ao longo da “parede” circular produz o mesmo efeito, a saber, em cada quarto de círculo a velocidade tem sua direção alterada de 90° , de modo que toda a análise para uma trajetória quadrada pode ser entendida para uma trajetória circular, ou seja, também é verdadeiro para a trajetória circular que, a cada instante do percurso, o corpo experimenta uma força centrípeta de intensidade proporcional a $\frac{v^2}{R}$.

Apêndice 2: Intensidade proporcional ao inverso do quadrado da distância

Definimos inicialmente a distribuição de luz ao longo da área. Tal distribuição é uma taxa que mede a energia luminosa emitida de uma fonte pontual e distribuída de modo homogêneo para todos os lados, logo distribuída por uma esfera de raio “r”; esta esfera a cada momento se torna maior, pois a luz se propaga no espaço alcançando distâncias cada vez maiores. Assim a taxa que representa o espalhamento da luz é a razão entre a energia sobre a área de uma esfera (área = $4\pi \cdot r^2$)

$$I = \frac{I_{vz}}{\text{área}} \Rightarrow I = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot r^2}$$

P/ uma distância

$$\Rightarrow I = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot r^2}$$

P/ uma distância $R = 2r$:

Imaginemos agora a luz alcançando uma outra distância duas vezes maior do que a distância “r”, ou seja, escrevamos a distribuição da luz a uma distância $R = 2r$ da fonte de emissão de luz:

$$I = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot r^2}$$

P/ uma distância $R = 2r$: $I' = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot R^2}$

$$I' = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot R^2} \Rightarrow I' = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot (2r)^2}$$

Nesse caso percebemos que ao elevarmos ao quadrado a nova distância, obteremos no denominador da taxa de distribuição da energia luminosa um fator “4”:

$$I' = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot (2r)^2} \Rightarrow I' = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot 4 \cdot r^2}$$

$$I' = \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot 4 \cdot r^2} \Rightarrow I' = \frac{1}{4} \cdot \frac{I_{vz}}{4\pi \cdot r^2}$$

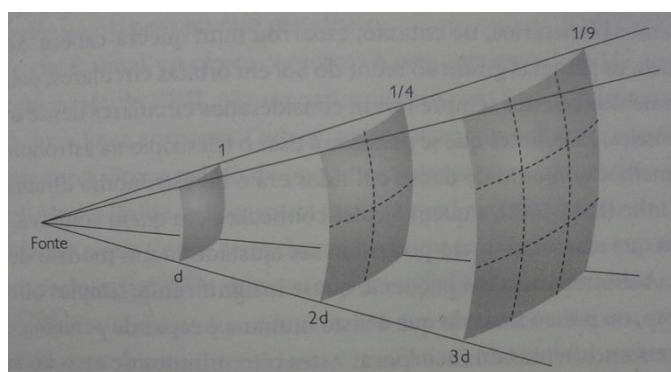
Reescrevendo o resultado percebemos que a distribuição I' de luz a uma distância duas vezes maior implica em uma intensidade quatro vezes menor que a intensidade I .

$$\frac{I}{4\pi r^2} \Rightarrow I' = \frac{1}{4} \cdot \frac{I}{4\pi r^2} \Rightarrow I' = \frac{I}{4}$$

$$I = \frac{I_0}{4\pi r^2} \Rightarrow I = \frac{I_0}{4\pi r^2}$$

Para uma distância $R = 2r$: $I' = \frac{I_0}{4\pi (2r)^2} \Rightarrow I' = \frac{I_0}{4\pi \cdot 4r^2} \Rightarrow I' = \frac{I_0}{4\pi \cdot 4r^2} \Rightarrow I' = \frac{1}{4} \cdot \frac{I_0}{4\pi r^2} \Rightarrow I' = \frac{I}{4}$

Se tentarmos repetir o raciocínio anterior para $R = 3r$ obteremos uma intensidade 9 vezes menor, se repetirmos o processo para uma distância $R = 4r$, encontraremos uma distribuição energética 16 vezes menor e assim sucessivamente. Ora, tal comportamento se dá pelo fato de que a intensidade luminosa é função inversamente proporcional ao quadrado da distância. O esquema¹²⁷ a seguir ilustra a discussão.



¹²⁷ CREASE, 2011, p.63.

Apêndice 3: Dedução da Lei Harmônica de Kepler a partir da Lei de Atração Universal de Newton

Se por um lado, Newton partiu também das Leis de Kepler para sua investigação, por outro ele conseguiu mostrar que os resultados empíricos do astrônomo alemão podem ser entendidos como consequências de uma Lei mais fundamental, a sua Lei de Atração Universal. Além de tal demonstração exemplificar o fazer científico que se retroalimenta permanentemente, ela também valida a descoberta newtoniana. Vejamos a demonstração:

Tomaremos como exemplo o movimento circular de raio “R” de um satélite ao redor de um planeta tendo-o no centro de sua órbita. Se a força que obriga um satélite a orbitar ao redor de um planeta é a força gravitacional, então podemos escrever que a força resultante centrípeta é a força newtoniana. Notemos que a massa “m” simboliza a massa do satélite, enquanto a massa “M” simboliza a massa do planeta. O fato da massa “m” aparecer em ambos os lados da igualdade permite que ela seja cancelada.

Na sequência reescrevemos a intensidade da aceleração centrípeta a partir da velocidade angular “ ω ” do satélite.



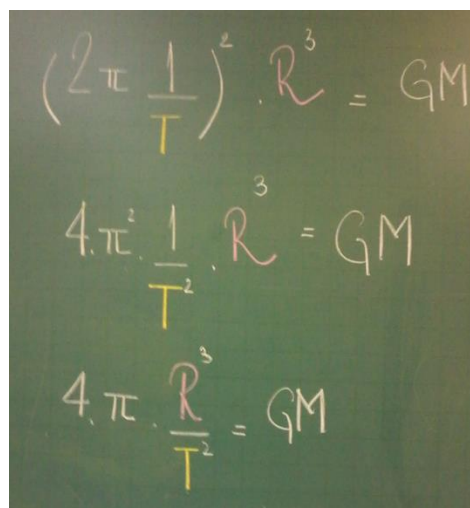
Handwritten equations on a chalkboard:

$$F_{cp} = F$$

$$m \cdot a_{cp} = \frac{GMm}{R^2}$$

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2}$$

$$\omega^2 R^3 = GM$$



Handwritten equations on a chalkboard:

$$\left(2\pi \frac{1}{T}\right)^2 R^3 = GM$$

$$4\pi^2 \frac{1}{T^2} R^3 = GM$$

$$4\pi^2 \frac{R^3}{T^2} = GM$$

O próximo passo é relacionar a velocidade angular “ ω ” com o intervalo de tempo de uma volta completa do satélite ao redor do planeta, isto é, com o período “T”. A partir de tal situação precisamos escrever a igualdade de maneira que isolemos a constante de Kepler, isto é, de modo que isolemos $k = R^3/T^2$.

Ao tentar isolar a constante de Kepler, perceberemos que no lado oposto à constante na igualdade aparecerem a constante de Cavendish “G” e a massa “M” do planeta divididos

pelo número “ 4π ”: ora tal resultado também é constante o que mostra que a Lei Harmônica de Kepler pode ser entendida com um resultado da Lei descoberta por Newton!

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi}$$

mas $G = \text{constante}$
 $M = \text{constante}$
 então ...
 $\frac{GM}{4\pi} = \text{constante} \quad \nabla \nabla$

logo $\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi}$

então $\frac{R^3}{T^2} = \text{constante} \quad \nabla$

que é o resultado afirmado
 por Kepler em sua 3ª Lei: $k = \frac{R^3}{T^2}$

BIBLIOGRAFIA

ANDERY, Maria Amália et al. **Para compreender a ciência: Uma perspectiva histórica**. 4. ed. Rio de Janeiro: Garamond Universitária, 2014. 436 pp.

BARRA, Eduardo Salles de Oliveira. **OMNIS PHILOSOPHAE DIFFICULTAS: O conceito de força na filosofia natural de Newton**. 1994. 191 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Filosofia, FFLCH - USP, São Paulo, 1994

BARRA, Eduardo Salles de Oliveira. **A primazia das relações sobre as essências: as forças como entidades matemáticas nos Principia de Newton**. Scientiae Studia: Revista Latino-Americana de Filosofia e História da Ciência, São Paulo, SP, v.4. nº 8, pp.547-569, out. 2010. Trimestral

Bíblia de Jerusalém. São Paulo – SP. Editora Paulus, 8ª impressão, 2012

SCIENTIAE STUDIA: Revista Latino-Americana de Filosofia e História da Ciência. São Paulo SP: FFLCH - USP, v. 8, n. 4, outubro, 2010. Trimestral.

COHEN, I. Bernard. **O nascimento de uma nova física: De Copérnico a Newton**. São Paulo - SP: Edart São Paulo, 1967. 204 pp.

COHEN, I. Bernard. **The Newtonian Revolution**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. 404 pp.

COHEN, I. Bernard. **La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas**. Madrid – Espanha: Editora Alianza Editorial, 1983, 432 pp. Tradução de Carlos Sólis Santos.

COHEN, I. Bernard; SMITH, George E. **The Cambridge Companion to Newton**. Cambridge: Cambridge Universtiy Press, 2000. 500 pp.

COHEN, I. Bernard; WESTFALL, Richard. **NEWTON: textos, antecedentes, comentários**: escolhidos por Bernard Cohen e Richard Westfall. Rio de Janeiro - RJ: EDUERJ/contraponto, 2002. 524 pp. Tradução de Vera Ribeiro.

COMTE-SPONVILLE, André. **Dicionário Filosófico**. São Paulo - SP: Livraria Martins Fontes Editora Ltda., 2003. 660 pp. Tradução de Eduardo Brandão.

CREASE, Robert P. **As grandes equações: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram.** Rio de Janeiro - RJ: Zahar, 2011. 276 pp. Tradução: Alexandre Cherman.

DESCARTES, René. **Princípios da Filosofia.** 2. ed. São Paulo - SP: Editora Rideel, 2007. 288 pp.

DIEUDONNÉ, Jean. **A formação da matemática contemporânea.** Lisboa - Portugal: Publicações Dom Quixote, 1990. 294 pp.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas - SP: Editora da Unicamp, 2004. 844 pp. Tradução de Hygino H. Domingues.

FEYNMAN, Richard P.. **Física em seis lições.** 4. ed. Rio de Janeiro - RJ: Ediouro, 1999. 208 pp. Tradução de Ivo Korytowski.

GALILEI, Galileu. **Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano.** 3. ed. São Paulo: Editora 34, 2011. 888 pp. Tradução, introdução e notas: Pablo Rubén Mariconda.

GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O método nas ciências naturais.** São Paulo - SP: Editora Ática, 2010.

HALLEY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física - volume 1.** 6. ed. Rio de Janeiro - RJ: Ltc Editora, 2002. 278 pp. Tradução: José Paulo Soares Axevedo.

HERIVEL, John. **The Background to Newton's Principia: a study of Newton's dynamical researches in the years 1664-84.** Oxford: Clarendon Press, 1965, 337 pp.

IEZZI, Gelson; MURAKAMIM, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar volume 1: Conjuntos & Funções.** 6. ed. São Paulo - SP: Atual Editora Ltda., 1992. 334 pp.

ISAACS, Alan et al. **Dicionário Breve de Física.** Lisboa: Editorial Presença, 1996. 450 pp. Tradução de Maria Teresa Rio Escolval.

JAMMER, Max. **Conceitos de Força**: Estudos sobre os fundamentos da dinâmica. Rio de Janeiro - RJ: Contraponto/PUC Rio, 2011. 336 pp.

JUPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. 3. ed. Rio de Janeiro - RJ: Jorge Zahar Editor, 2001. 298 pp.

KOYRÉ, Alexander. **Newtonian Studies**. Chicago: The University Chicago Press, 1968. 288 pp.

MARTINS, Roberto de Andrade; SILVA, Cibelle Celestino. A MAÇÃ DE NEWTON: HISTÓRIA, LENDAS E TOLICES. **Estudos de História e Filosofia das Ciências: Subsídios para aplicação no ensino**, São Paulo SP, v. -, n. -, pp.167-189, 2006. -. Livraria da Física.

NEWTON, Isaac. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural**. São Paulo - SP: Editora da USP, 2008. 448 pp. Tradução de André Koch Torres Assis e Fábio Duarte Joly.

NEWTON, Isaac. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural -Livro I**. 2. ed. São Paulo - SP: Edusp/nova Stella, 2002. Vários tradutores.

PIZA, Antonio Fernando Ribeiro de Toledo. Isaac Newton e o seu sistema do mundo. **Revista USP**, São Paulo - SP, v. -, n. 32, p.222-228, dez. 1996. Trimestral.

SAUNDERS, Clare et al. **Como estudar filosofia**: Guia prático para estudantes. Porto Alegre - RS: Artmed, 2009. 168 pp. Tradução: Vinícius Figueira.

SAVIAN Fº, Juvenal. **Argumentação: a ferramenta do filosofar**. São Paulo - SP: Martins Fontes, 2010. 80 pp.

SCHENBERG, Mário. **Pensando a Física**. 5. ed. São Paulo - SP: Landy, 2001. 208 pp.

SIMMONS, George F.. **Cálculo com Geometria Analítica**: volume I. São Paulo - SP: Pearson Education do Brasil, 1987. 834 pp. Tradução de Seiji Hariki, 2013.

STEWART, Ias. **17 equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro - RJ: Zahar, 2013. 408 pp. Tradução de George Schlesinger.

TOSSATO, Claudemir Roque. **Força e Harmonia na Astronomia Física de Johannes Kepler**. 2003. 314 f. Tese (Doutorado) - Curso de Filosofia da Ciência, Deptº de Filosofia, FFLCH-USP, São Paulo - SP, 2003.

VERDET, Jean Pierre. **Uma História da Astronomia**. Rio de Janeiro - RJ: Jorge Zahar Editor, 1991. 310 pp. Tradução de Fernando Py.

WESTFALL, Richard. **Never at Rest**: A biography of Isaac Newton. New York - NY/USA: Cambridge University Press, 2008. 910 pp.

WESTFALL, Richard. **The Life Of Isaac Newton**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 328 pp.