UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE ASTRONOMIA, GEOFÍSICA E CIÊNCIAS ATMOSFÉRICAS
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

LEOPOLDO GORGES NETO

ONDAS GRAVITACIONAIS NA LICENCIATURA EM FÍSICA: UMA PROPOSTA DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA POR MEIO DO ELETROMAGNETISMO

SÃO PAULO, 2024

LEOPOLDO GORGES NETO

ONDAS GRAVITACIONAIS NA LICENCIATURA EM FÍSICA: UMA PROPOSTA DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA POR MEIO DO ELETROMAGNETISMO

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Ensino de Astronomia

Orientador: Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima

Versão Corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade.

SÃO PAULO, 2024

À quem contribuiu
À quem inspirou
À quem,
mesmo com lágrimas,
sempre apoiou.

Obrigado, pp!

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, professor José Ademir Sales de Lima, pelos ensinamentos, debates e apoio na construção dessa pesquisa.

Agradeço ao Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas e seus professores pelas valiosas lições.

Agradeço aos meus professores da Licenciatura em Física do Instituto Federal de Santa Catarina, campus Jaraguá do Sul – Centro pelos ensinamentos que moldaram minha identidade profissional.

Agradeço ao meu amigo de jornada, Elismar Lösch, pela importante contribuição neste trabalho.

Aos meus amigos pelo suporte e companheirismo.

Aos meus alunos que tanto me inspiram.

Agradeço à minha família: Nadia Simone Stinghen, Luiza Carolina Gorges, Nadine Cristine Lange, Isabella Streit e Davi Lucca Pereira.

Tudo gosta de viver onde envelhecerá mais lentamente.
Kip Thorne.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem de transposição didática de ondas gravitacionais no contexto da formação inicial de professores de física. Nossa proposta utiliza uma analogia com o eletromagnetismo, especificamente entre radiação eletromagnética e radiação gravitacional. Demonstramos que a dedução da função que descreve a trajetória espiral de um elétron em direção ao núcleo (na perspectiva clássica do eletromagnetismo) é similar à dedução da função que descreve a trajetória espiral de um sistema binário coalescente, conforme a analogia desenvolvida por Hilborn (2018). Utilizando essa analogia, encontramos equações apresentadas por Nascimento e Cuzinatto (2022), que nos permitem compreender algumas das principais características das ondas gravitacionais mediante os dados do evento GW150914 (Abbott *et al*., 2016). Propomos uma sequência didática baseada nessa abordagem e analisamos suas potencialidades e desafios à luz da teoria de Transposição Didática (Chevallard, 1991) e suas regras (Astolfi e Develay, 1995). Apesar dos resultados preliminares serem satisfatórios e coerentes com as regras da transposição didática, sugerimos a realização de novos estudos em sala de aula para investigar o assentimento deste objeto de conhecimento no Sistema de Ensino por meio dessa estratégia metodológica.

Palavras-chave: Ondas gravitacionais; Radiação gravitacional; Radiação eletromagnética; Transposição didática; Ensino de Física; Ensino de Astronomia.

ABSTRACT

In this work, we present a didactic transposition approach to gravitational waves in the context of initial physics teacher training. Our proposal uses an analogy with electromagnetism, specifically between electromagnetic radiation and gravitational radiation. We demonstrate that the derivation of the function describing the spiral trajectory of an electron towards the nucleus (from the classical electromagnetism perspective) is similar to the derivation of the function describing the spiral trajectory of a coalescing binary system, according to the analogy developed by Hilborn (2018). Using this analogy, we find equations presented by Nascimento and Cuzinatto (2022), which allow us to understand some of the main characteristics of gravitational waves from the data of the GW150914 event (Abbott *et al.*, 2016). We propose a didactic sequence based on this approach and analyze its potentialities and challenges in light of the Didactic Transposition theory (Chevallard, 1991) and its rules (Astolfi and Develay, 1995). Although the preliminary results are satisfactory and consistent with the rules of didactic transposition, we suggest conducting further classroom studies to investigate the assimilation of this knowledge object in the Education System through this methodological strategy.

Keywords: Gravitational waves; Gravitational radiation; Electromagnetic radiation; Didactic transposition; Physics education; Astronomy education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A astronomia é pródiga em encantar as pessoas. Quando analisamos seu ensino, notamos que o interesse dos estudantes em aprender seus conteúdos faz surgir inúmeras questões guiadas pela sua imaginação instigada por esse campo científico. Além disso, cada vez mais a influência digital proporcionada pela divulgação científica motiva os estudantes à ciência e o professor em sala de aula é o sujeito imediato responsável por atender suas demandas de conhecimento, justamente por sua identidade profissional representar um significado social coerente com o seu campo de formação (Guridi *et al*., 2020).

Mas o campo de pesquisa de Ensino de Astronomia enfrenta, dentre outras linhas de investigação, justamente um problema referente ao currículo da formação inicial de professores de física. Diversas pesquisas apontam que a escassez de cursos de graduação em física, que possuam a disciplina de astronomia em sua grade curricular, justifica a omissão de abordagens deste campo na educação básica pelo professor (Justiniano *et al*., 2014; Slovinscki *et al*., 2021; Gorges Neto e Arthury, 2022), mesmo apesar de documentos oficiais orientarem seu ensino, como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 1999) e mais recentemente a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Embora apenas 25,7% das licenciaturas em física do Brasil oferecem ao menos uma disciplina de astronomia obrigatória (Slovinscki *et al*., 2021), pensamos que não devemos nos resignar em desenvolver discussões e apresentar abordagens que estimulem seu ensino na formação inicial dos professores de física, justamente para fornecer subsídios teórico-práticos mínimos para seu ensino de forma adequada na educação básica.

Isso ganha ainda mais relevância quando estes conteúdos, ou objetos de conhecimento, fazem parte apenas da comunidade científica, isto é, quando ainda são incipientes as discussões sobre a reestruturação destes objetos de Saber Sábio para o sistema de ensino, no sentido da Transposição Didática de Chevallard (1991). Um exemplo disso é o objeto de conhecimento que discutimos neste trabalho: as ondas gravitacionais.

Quando consideramos a revolução liderada por Albert Einstein na compreensão da gravidade, percebemos que sua proposta de concebê-la não mais como uma força agindo instantaneamente à distância, como previa a teoria de gravitação newtoniana, mas como perturbações na curvatura do espaço-tempo propagando-se pelo universo, estabeleceu as bases para uma compreensão mais profunda do cosmos (Lima e Santos, 2019).

Em 1916, Einstein, ao considerar campos gravitacionais fracos em sua teoria, publicou um artigo apontando a existência de ondas gravitacionais, que seriam emitidas por um sistema mecânico isolado excitado no regime não relativista ($\vec{v} \ll c$). Posteriormente, em 1918, ele corrigiu um erro no artigo de 1916 e apresentou a fórmula do quadrupolo, resultante da perda de energia (Bassalo e Catanni, 2016). Nesse mesmo artigo, Einstein sugeriu que as ondas gravitacionais provavelmente nunca seriam detectadas, dado que sua criação demandaria eventos extremamente energéticos, que até então eram desconhecidos (Aguiar, 2021).

No entanto, ao longo de aproximadamente um século de desenvolvimento teórico e tecnológico, a descoberta que fora inicialmente teórica, encontrou espaço também entre os físicos experimentais e engenheiros. A detecção direta de ondas gravitacionais só pôde ser realizada por meio de expressivos investimentos e trabalhos que conectaram cientistas do mundo todo. No dia 14 de setembro de 2015, por meio do LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Waves Observatory*), observamos pela primeira vez um evento de coalescência de buracos negros (Aguiar, 2021). E a partir disso, tornou-se possível compreender melhor as implicações da fenomenologia das ondas gravitacionais, até então desconhecidas.

É fato que a astronomia baseada em sinais eletromagnéticos foi responsável por algumas das descobertas mais surpreendentes da ciência. Por meio de Espectroscopias e Fotometrias dos corpos celestes foi possível conhecer desde a massa dos planetas e estrelas, como também sua composição, e até mesmo a expansão do universo (Lima e Santos, 2017). Devido sua relevância científica e epistemológica, a luz e os fenômenos eletromagnéticos são estudados por todo professor de física e estabelece-se satisfatoriamente como um objeto de conhecimento a ser ensinado na educação básica.

Mas ao passo em que foram desenvolvidas novas técnicas de obter informação sobre o universo por meio de outros mensageiros e que proporcionaram descobertas tão relevantes quanto as obtidas por meio de sinais eletromagnéticos, a formação inicial dos professores de física precisa acompanhar essa evolução e se modernizar.

> As ondas gravitacionais, assim como outros objetos [de conhecimento], não devem ser concebidas como pertencentes exclusivamente à Física ou aos cientistas, uma vez que são frutos da própria humanidade em seu desenvolvimento. É preciso, então, que tais objetos efetivamente adentrem o campo educacional, que sejam democratizados por meio das atividades educacionais que permitam realizar reflexões sobre ciência na educação em ciências, e para tais reflexões constituam-se de apropriações concretas por parte dos sujeitos (estudantes e professores) com possibilidade efetiva de promover transformações no sentido da emancipação humana (Garcia e Camillo, 2021, p. 13).

Sabendo que a Relatividade Geral consiste em uma interpretação geométrica da gravitação, que se utiliza de uma matemática bastante rigorosa e avançada que pode afastar professores de física de uma compreensão física emancipatória de ondas gravitacionais, destacamos a alternativa, encontrada na literatura (Schutz, 1984; Hilborn, 2018)[1], de articular uma analogia entre este objeto de conhecimento e o eletromagnetismo.

Apresentamos nesse trabalho uma abordagem que consiste em uma analogia entre radiação eletromagnética e radiação gravitacional. Mostraremos que a dedução da função que descreve a trajetória espiral de um elétron em direção ao núcleo (na visão clássica do eletromagnetismo) pode ser muito similar a dedução que descreve a trajetória em espiral de um sistema binário coalescente com analogia, resguardadas, claro, as especificidades dos domínios. A partir desta analogia, conseguimos encontrar algumas das equações que Hilborn (2018) e Nascimento e Cuzinatto (2022) encontraram de forma independente em seus trabalhos. Além disso, analisamos as potencialidades e desafios na articulação dessa analogia para o ensino de ondas gravitacionais na formação inicial de professores de física, em consonância com a teoria de Transposição Didática (Chevallard, 1991) e suas regras (Astolfi e Develay, 1995).

Neste contexto, os capítulos desta dissertação estão organizados da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresentamos um panorama da Transposição Didática de ondas gravitacionais a partir da analogia com o eletromagnetismo; no segundo capítulo, tratamos de fazer uma breve revisão e/ou aprofundamento do eletromagnetismo; no terceiro capítulo, apresentamos nossa analogia e algumas equações deduzidas a partir dela; no quarto capítulo, desenvolvemos uma sequência didática e a analisamos à luz das regras da transposição didática; no quinto capítulo, nossas considerações finais sobre o trabalho, apresentando desafios e possibilidades da transposição didática de ondas gravitacionais. Finalmente, o apêndice e anexos mencionados ao longo do texto.

Pretendemos que este trabalho proporcione reflexões sobre o ensino de ondas gravitacionais para que este objeto de conhecimento seja apropriado pelos professores de física em sua formação inicial. Consideramos esta etapa formativa determinante para a estruturação de conceitos que posteriormente adentrarão a sala de aula por meio de metodologias de ensino que possibilitem um aprendizado adequado e satisfatório.

[1] Vale ressaltar também o trabalho de Nascimento e Cuzinatto (2022) que, apesar de não possuir este mesmo objetivo, algumas vezes fazem o paralelo com definições do eletromagnetismo.

1 ELEMENTOS PARA UMA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentamos brevemente alguns dos elementos que constituem uma Transposição Didática (TD), concentrando nossa discussão em características que serão oportunas para os próximos capítulos.

Encontramos na literatura alguns trabalhos que procuraram discutir os saberes escolares com base na teoria de TD de Yves Chevallard (Almouloud, 2011; Pagliochi, 2020). Especialmente no âmbito da física moderna e contemporânea, campo de pesquisa do objeto de conhecimento que exploramos neste trabalho, destacamos os artigos (Brockington e Pietrocola, 2005; Siqueira e Pietrocola, 2006).

A TD pressupõe a existência de um processo de transformação do Saber composto por três patamares: Saber Sábio, Saber a Ensinar e Saber Ensinado. O Saber Sábio diz respeito ao saber original, está presente e é construído pela comunidade científica, ou seja, é construído por cientistas e pesquisadores; No Saber a Ensinar, o conhecimento é reestruturado em uma linguagem que se adeque ao ensino, sendo desta forma reorganizado. Quem realiza este trabalho são os professores, pesquisadores, autores de livros didáticos, especialistas das disciplinas específicas etc.; No Saber Ensinado é onde ocorre a adequação do conhecimento à sequência didática, ou seja, ao tempo de sala de aula. O professor é quem detém o papel principal neste último (Chevallard, 1991).

Apenas para ilustrar a aplicabilidade de sua teoria, Chevallard a emprega em um breve exemplo do conhecimento de distância entre dois pontos na matemática:

> O conceito matemático de distância é introduzido em 1906 por Maurice Fréchet (objeto do conhecimento matemático); no primeiro ciclo do ensino secundário francês, a noção matemática de distância, derivada da definição de Fréchet, aparece em 1971 no programa da turma do quarto ano (objeto a ensinar); Seu tratamento didático mudou com os anos desde sua designação como objeto a ser ensinado: o trabalho de transposição continua (Chevallard, 1991, p. 46).

Como a citação acima destaca, o processo de adaptação de um objeto do saber para um objeto de ensino não é imediato, sua TD continua após diferentes propostas de introdução realizadas por pesquisadores que refletem sobre o tema e, sobretudo, pelo assentimento do Sistema de Ensino.

Justificando a necessidade de existência de uma TD do objeto do saber, Chevallard introduz o Sistema Didático em um Sistema de Ensino que permite seu funcionamento. O Sistema de Ensino, por sua vez, está incorporado na chamada Noosfera.

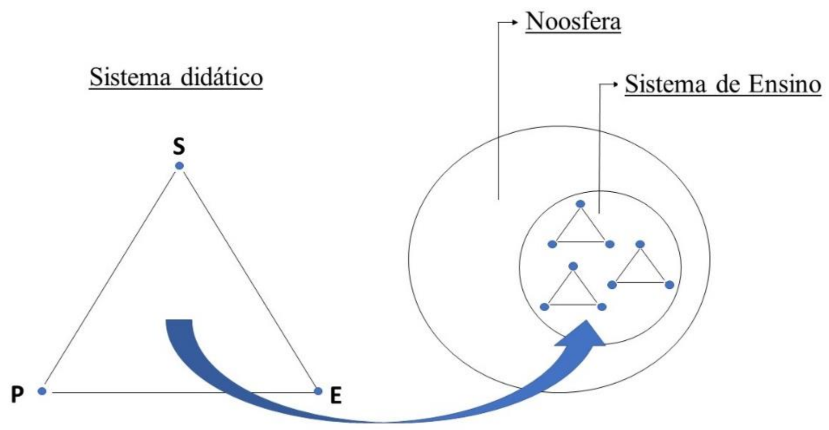


Figura 1 – O Sistema de Ensino.
Fonte: Adaptado de Chevallard (1991, p.28).

Onde o Sistema Didático é composto essencialmente pelas inter-relações entre o Saber (S), o Professor (P) e o Estudante (E), e está inserido no Sistema de Ensino, como comentado. Na Noosfera as ideias propostas para o ensino são refletidas com as exigências da sociedade não especializada. Os agentes desta esfera podem ser

> os representantes do sistema educativo, com ou sem mandato (desde o presidente de uma associação de professores a um simples professor militante) [...que se relacionam] com os representantes da sociedade (os pais dos alunos, os especialistas da disciplina que militam em torno do seu ensino, os emissários do corpo político) (Chevallard, 1991, p. 28).

A dinâmica proposta pela Noosfera é determinante para indicar a permanência no Sistema de Ensino de um objeto de conhecimento que passou por TDs. Assim, a TD pode ser entendida como um instrumento de análise para compreender o caminho e as transformações que um objeto de conhecimento passou, do ambiente que se originou ao Sistema de Ensino, do Saber Sábio ao Saber Ensinado.

A partir disso, Astolfi e Develay (1995) propõem cinco regras que orientam uma perspectiva sobre o processo de transformação do saber na teoria de TD. Para os autores, a TD deve **(i) Modernizar o Saber Escolar**, isto é, aproximar os conteúdos trabalhados nas escolas dos conteúdos científicos atuais; **(ii) Atualizar o saber a ensinar**, pois alguns objetos de conhecimento escolar tornam-se obsoletos em relação ao conhecimento diluído na sociedade; **(iii) Articular o Saber novo com o antigo**, o Saber a ser transposto deve ser articulado com um Saber antigo, não de forma radical como uma refutação, mas de forma dialogada; **(iv)**

Transformar um Saber em exercícios e problemas, o Saber Sábio que for capaz de gerar exercícios e problemas terá mais chances de se tornar um Saber a Ensinar e **(v) Tornar um conceito mais compreensível**, isto é, a TD deve permitir a aprendizagem de conceitos (Brockington e Pietrocola, 2005).

Vale ressaltar, como coloca Pietrocola (2008, p. 08), "é ilusório pensar que a avaliação sobre a “ensinabilidade” de um saber se dê de maneira teórica e a priori". Isto é, a TD pode ser entendida como um instrumento de análise dos saberes que constituem o Sistema de Ensino, como colocamos anteriormente, mas apenas nos fornece **indícios de adaptabilidade** daqueles conhecimentos que podem se estabelecer como objetos de conhecimento escolar, salientando que somente as avaliações de sequências didáticas aplicadas em sala de aula é que vão nos indicar a real potencialidade de determinado objeto de conhecimento se estabelecer no Sistema de Ensino.

Por exemplo, ao realizarem uma análise da TD em conteúdos de Física Moderna e Contemporânea para a educação básica, em especial sobre a Teoria Quântica, Brockington e Pietrocola (2005) apontaram que, em relação às regras supracitadas, a (iv) e (v) são aquelas mais desafiadoras e complexas para professores de física, pois recorrem a necessidade de planejar estratégias didáticas que suportem seu rigor matemático e que proporcionem aprendizado de seus conceitos probabilísticos. Assim, sugerem abordagens de cunho filosófico, privilegiando o debate fenomenológico deste conhecimento.

Os autores, ainda, apontam que

> [Um] novo Saber Escolar deve ser avaliado em termos da motivação que ele gera e de seu sucesso entre os alunos. Porém, agora o sucesso deve também ser visto no sentido de entendimento, prazer e significação e não apenas em termos de adaptabilidade (Brockington e Pietrocola, 2005).

Com o disposto, temos a noção de que há um processo de reestruturação do saber em três distintos patamares, onde diferentes sujeitos tomam suas ações. Temos elencados, sobretudo, alguns indicativos dos saberes que permanecerão, em termos de adaptabilidade, no Sistema de Ensino após sua longa trajetória de transposição, sabendo que apenas as sequências didáticas avaliadas em sala de aula que podem determinar a permanência destes.

Assim, podemos estabelecer a localização deste trabalho no processo de transformação do objeto de conhecimento “ondas gravitacionais”. Como pretendemos apresentar uma abordagem para ser utilizada por professores formadores nos cursos de licenciatura em física, este trabalho se encontra no patamar do Saber a Ensinar. Na seção a seguir, discutimos o panorama da transposição didática de ondas gravitacionais.

1.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DE ONDAS GRAVITACIONAIS

> *O conceito de ondas gravitacionais só pode ser entendido à luz da teoria da relatividade geral de Albert Einstein. Sem ela não podemos entender o que são ondas gravitacionais (Aguiar, 2021).*

Quando estudamos epistemologia, podemos entender que há uma maneira de avaliarmos nossas teorias científicas. Para Lakatos, por exemplo, quando dois programas de pesquisa se dedicam a explicar o mesmo fenômeno, teremos um que será progressivo e outro degenerativo. O primeiro é aquele que consegue explicar os fenômenos que se propõe, mas que também fornece indícios de novos fenômenos a serem descobertos. O segundo é o programa que não mais consegue indicar novos fenômenos a serem descobertos, se concentrando naquilo que já descobriu e/ou adequando a teoria às novas observações. A astronomia ptolomaica, por exemplo, cedeu espaço a astronomia copernicana e, desta forma, um programa de pesquisa degenerativo cede espaço ao rival progressivo (Chalmers e Fiker, 1993).

Um episódio semelhante é o caso da gravitação. Quando analisamos o desenvolvimento da ciência em torno desse objeto de conhecimento, percebemos que, apesar de conseguir explicar muitos fenômenos do cotidiano, quando o programa de pesquisa da gravitação newtoniana encontrou o programa de pesquisa rival, de Einstein, ele gradativamente foi degenerando[2]. A teoria de gravitação de Einstein, ou Teoria da Relatividade Geral, foi capaz de significar elementos que a teoria de gravitação newtoniana não conseguia e, além disso, conseguiu progredir nosso conhecimento ao propor a existência de novos fenômenos que, com o passar dos anos, foram sendo empiricamente confirmados (Arthury, 2016).

Salientamos a citação colocada no início desta seção. As ondas gravitacionais são deduzidas apenas pelas equações de campo da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. A gravitação newtoniana prevê que a informação de alterações provocadas, por exemplo, nas posições das fontes, desloca-se instantaneamente até o observador. Para a Relatividade Geral, essa informação possui velocidade finita (Herdeiro, 2020).[3]

Uma vez que no patamar do Saber Sábio, aquele desenvolvido por cientistas, as ondas gravitacionais só podem ser compreendidas por meio de deduções da Relatividade Geral, nos questionamos quanto ao seu ensino. É possível compreender fisicamente ondas gravitacionais

---

[2] Ao conseguir explicar as perturbações na órbita de Mercúrio, por exemplo, que era uma anomalia que a teoria da gravitação newtoniana não conseguia explicar. Essa dificuldade fez, inclusive, alguns astrônomos proporem a existência de um planeta, Vulcano, que seria o responsável por tais perturbações (Arthury, 2016).

[3] Curiosamente, no eletromagnetismo temos algo semelhante. Veremos no próximo capítulo.

sem necessariamente adentrarmos nos estudos de Relatividade Geral? Caso negativo, estudantes de licenciatura em física, futuros professores de física, estão, portanto, sujeitos à incompreensão deste fenômeno da natureza por não possuir disciplinas específicas em seu currículo?

Alguns pesquisadores propuseram distintas formas de introdução de ondas gravitacionais em diferentes níveis formativos, como no ensino médio (Fontele e Carvalho, 2020), por meio de uma série de atividades que articulam a experimentação e recursos de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), e em nível superior (Cardoso, 2023), onde são apresentadas as equações de maneira tradicional. Em nossa pesquisa, nos concentramos em buscar uma possibilidade de apropriação dos conceitos físicos que envolvem este objeto de conhecimento. Conforme analisamos no capítulo 4, uma abordagem proeminente se dá a partir da analogia entre radiação gravitacional e a radiação eletromagnética[4]. Destacamos na sequência três trabalhos que propõem estas relações e que serão importantes para o desenvolvimento do presente estudo.

Um dos mais antigos e relevantes artigos que procurou elucidar o conceito de ondas gravitacionais articulando-o com o eletromagnetismo, foi o trabalho "*Gravitational waves on the back of an envelope*" publicado em 1984 por Bernard F. Schutz no periódico *American Journal of Physics.* O autor abordou a intersecção entre esses dois domínios científicos e delineou uma abordagem acessível para aqueles que não são especialistas em Relatividade Geral. Em suas próprias palavras, seu trabalho "[...] pode auxiliar na didática dos fenômenos das ondas gravitacionais para alunos de graduação e para outros que não têm especialização em relatividade geral" (Schutz, 1984, p. 412). Vimos, em nossa pesquisa, que esse foi o primeiro trabalho que mencionou explicitamente o interesse de transposição deste objeto de conhecimento.

Além disso, a respeito das questões que refletimos acima, Schutz (1984, p. 412) coloca: "apesar das radiações gravitacionais serem consequências da relatividade geral, não é necessário entender relatividade geral para compreender o que é esta radiação e para derivar estimativas de ordem de grandeza de seus efeitos".

Nesse estudo, mais especificamente, o autor propõe uma adaptação do potencial escalar retardado da eletrodinâmica ao contexto gravitacional, resultando em estimativas comparáveis em magnitude às deduções estabelecidas pela Relatividade Geral. Vale ressaltar que neste

---

[4] É interessante apontar que, em nível do Saber Sábio, também houve propostas de analogias entre a radiação eletromagnética e radiação gravitacional, algumas antes mesmo da Relatividade Geral de Einstein. Para mais informações, vide Garcia e Camilo (2021).

modelo, apesar da notável aproximação que alcançara, as ondas gravitacionais produzidas se propagam longitudinalmente, ao invés de serem transversais às fontes que a produziram, como sugere a Relatividade Geral.

Com o título “*Gravitational waves from orbiting binaries without general relativity*”, o artigo publicado em 2018 por Robert C. Hilborn no periódico *American Journal of Physics*, também sugestiona responder as questões que colocamos a pouco. No início desse trabalho, o autor deixa claro que não pretende construir uma teoria relativística alternativa à gravidade, mas sim “estabelecer até que ponto tal modelo [construído a partir da analogia entre eletromagnetismo e gravitação] pode explicar a produção de ondas gravitacionais a partir de binárias em órbita e a detecção dessas ondas longe de suas fontes” (Hilborn, 2018, p. 186).

Imbuindo um potencial de ensinabilidade desse objeto de conhecimento por meio dessa analogia, o autor coloca que “os argumentos apresentados [em seu trabalho] devem ser facilmente compreensíveis para professores de física que não são especialistas em Relatividade Geral e para seus alunos de nível avançado” (Hilborn, 2018, p. 186).

Diferentemente de Schutz (1984) que realizou suas deduções a partir da analogia com o potencial escalar retardado, Hilborn (2018) faz o exercício partindo do potencial vetor retardado. Neste modelo, o autor encontra deduções que mostram a natureza transversal das ondas gravitacionais para uma fonte binária em órbita, além de mostrar que a energia irradiada tem a dependência da massa, frequência orbital e separação de massas previstas por deduções linearizadas da Relatividade Geral, sem invocar a curvatura do espaço-tempo ou o tensor de energia-momento.

Apesar do esforço considerável em realizar essa transposição, é comum que a formação em licenciatura em física não abranja a eletrodinâmica em profundidade adequada para uma compreensão satisfatória das deduções apresentadas. Isso pode, por vezes, afastar professores formadores da possibilidade de incorporar o conteúdo desses artigos em seus planos de ensino. Assim, introduzimos o terceiro artigo que visa abordar as ondas gravitacionais a partir de física básica.

O estudo em questão foi publicado em 2022 na Revista Brasileira de Ensino de Física pelos autores Nicolas L.N.S. Nascimento e Rodrigo R. Cuzinatto e tem como título “Ondas gravitacionais de buracos negros coalescentes: um estudo quantitativo a partir de física básica”. Neste trabalho, os autores apresentam uma abordagem a partir dos conhecimentos trabalhados nas disciplinas de Cálculo e Físicas Básicas. Os autores colocam:

> O escopo do presente trabalho é ampliar o público-alvo do assunto das ondas gravitacionais e buracos negros, tornando os principais resultados divulgados pela Colaboração LIGO-Virgo acessíveis aos estudantes em início de graduação em ciências exatas, incluindo futuros físicos, químicos, geólogos, oceanógrafos, matemáticos, engenheiros, bacharéis em ciência e tecnologia; todos os quais passam pelos cursos de cálculo diferencial e integral e física básica (Nascimento e Cuzinatto, 2022, p. 02).

Desta forma, se utilizam de conhecimentos da mecânica newtoniana e do eletromagnetismo para desenvolver equações que permitem uma compreensão de ondas gravitacionais em nível de graduação. Embora não adentrem o campo da Relatividade Geral, os autores alcançam estimativas de mesma ordem de grandeza ou maiores que aquela teoria por meio de deduções a partir da física trabalhada nestes cursos e, sobretudo, por meio de análises dimensionais, que possibilitam um entendimento dos trabalhos reportados anunciando a detecção de ondas gravitacionais.

No decorrer do trabalho, os autores comparam seu modelo aos dados obtidos pela primeira detecção de ondas gravitacionais pelo LIGO, em 2015. Ao final, estendem seu objeto de estudo às dez primeiras detecções, de 2016 a 2020, demonstrando as potencialidades e desafios de sua abordagem.

Relacionando às questões que colocamos anteriormente, os autores apontam que seu trabalho “mostra que é possível entender as características essenciais das ondas gravitacionais emitidas pela coalescência de sistemas binários a partir dos conhecimentos de física básica” (Nascimento e Cuzinatto, 2022, p. 01). Para o nosso propósito, é importante apontar que algumas das expressões deduzidas por estes autores são equivalentes às expressões deduzidas por Hilborn (2018)[5].

Estes trabalhos podem ser caracterizados no patamar do Saber a Ensinar, pois propõem reorganizar o conteúdo de ondas gravitacionais para ser entendido por não especialistas na sua formação inicial. Apesar de buscarem uma alternativa que não recorra a utilização de deduções provenientes da Relatividade Geral, mas sim de conhecimentos trabalhados na formação inicial de físicos, e que, portanto, é um exercício de transposição didática que pode se adaptar bem à realidade da formação de professores de física. No entanto, isso não significa que uma analogia entre radiação gravitacional e radiação eletromagnética não demande um aprofundamento nos estudos de eletromagnetismo.

Os obstáculos que são encontrados na compreensão de ondas gravitacionais, a partir dessa analogia, são menos exigentes daqueles encontrados no caminho tradicional baseado na

[5] Veremos isso no capítulo 4.

teoria da Relatividade Geral. Além disso, por partir de um objeto de conhecimento bem estabelecido no Sistema de Ensino (no caso, o eletromagnetismo), as possibilidades de apropriação deste conteúdo por parte dos professores e, consequentemente, de sua transposição para a educação básica, ficam mais tangíveis, como veremos em maior profundidade no capítulo 4.

Vale destacar, como vimos anteriormente, que a noção matemática de distância estivera por sessenta e cinco anos em um processo de adaptação ao Sistema de Ensino. Com este modesto exemplo, sugerimos que estamos presenciando a possibilidade do objeto de conhecimento “ondas gravitacionais” também estar passando por uma reestruturação para um objeto a ser ensinado.

Os trabalhos apresentados nessa seção mostram a existência de possíveis relações entre a radiação gravitacional e a radiação eletromagnética que pode ser explorada durante a formação inicial de professores. Salvo alguns aprimoramentos[6], podemos dizer que um dos principais desafios atuais está em adequar este objeto de conhecimento ao tempo de sala de aula, e consideramos as iniciativas na formação inicial de professores de física preponderantes para realizar isso.

Nos próximos capítulos, nos dedicamos a apresentar uma alternativa de ensino de ondas gravitacionais por meio da analogia entre radiação gravitacional e radiação eletromagnética.

[6] Por exemplo, por não adentrarem no caráter relativístico deste fenômeno, Hilborn (2018) e Nascimento e Cuzinatto (2022) apontam que está em aberto uma explicação em seus modelos que contemple os momentos de maior aproximação das binárias e o momento de *ring-down* presentes nos gráficos de detecção.

2. UMA BREVE INCURSÃO NA ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

Nosso objetivo nesse capítulo é encontrar a função que descreve a trajetória espiral de um elétron em direção ao núcleo demonstrada pela eletrodinâmica clássica. Para isso, precisamos deduzir algumas equações que nos permitirão alcançar tal expressão. Partimos das equações de Maxwell e mostraremos sua relação com as equações de onda não homogêneas. Após isso, introduzimos os potenciais e campos de Liénard-Wiechert, que descrevem as características de uma partícula com carga em movimento, para assim, deduzir a fórmula de Larmor, referente a emissão de energia dada por esta partícula. Em posse desta última, encontramos a função que desejamos.

É importante destacar que, com exceção da última seção onde deduzimos a função que procuramos, todas as deduções deste capítulo podem ser encontradas em (Machado, 2000; Machado, 2002; Machado, 2006). Nesse capítulo, reorganizamos sua apresentação para adequar aos nossos objetivos.

2.1 POTENCIAIS ESCALAR E VETORIAL

As famigeradas equações de Maxwell podem ser expressas no seguinte formalismo:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \tag{4}$$

Estas equações formam um conjunto de equações diferenciais parciais e acopladas de primeira ordem. A partir delas, podemos determinar os campos $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ por meio das distribuições de densidade de carga ρ e de corrente $\vec{J}$. No entanto, para um caso geral, sua resolução não é tão simples, pois as grandezas físicas envolvidas no problema podem depender do espaço e do tempo.

Nos casos eletrostáticos e magnetostáticos utilizamos o conceito de potenciais escalares e vetoriais para a resolução desse problema. De forma análoga, para o caso geral, partimos da noção de que o fluxo do campo magnético através de uma superfície fechada é zero, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Sabendo que quando o divergente de um campo vetorial é nulo, ele pode ser escrito como sendo o rotacional de outro campo vetorial, ou seja, podemos utilizar a seguinte propriedade:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{5}$$

Portanto, o campo vetorial $\vec{A}$ pode ser definido como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{6}$$

O campo $\vec{A}$ é o potencial vetor magnético e, desta forma, $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$.

Na eletrostática, o campo elétrico é descrito como sendo $\vec{E} = -\nabla\phi$. No entanto, estamos estudando o campo elétrico onde seu rotacional é diferente de zero. Encontramos a expressão do campo elétrico que se relaciona com o potencial escalar ϕ considerando a equação (3) e adicionando ao campo magnético o significado de $\vec{B}$ que encontramos acima:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Uma vez que encontramos uma grandeza cujo rotacional é nulo, podemos utilizar novamente a propriedade (5) no termo entre parênteses e definir essa grandeza como um potencial escalar ϕ:

$$\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

Ou ainda

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{7}$$

Desta forma, os campos elétrico e magnético ficam escritos em termos dos potenciais por meio das equações (7) e (6), respectivamente. Interessante notar que quando $\vec{A}$ for nulo e também não depender do tempo (situação magnetostática), retornamos a expressão usual para o campo elétrico.

Substituindo a equação (7) na Lei de Gauss (1),

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$-\nabla \cdot (\nabla\phi) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Sabendo que o operador Laplaciano pode ser definido como o divergente do gradiente $\nabla^2 = \nabla \cdot (\nabla)$, temos

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{8}$$

De forma análoga, aplicando as equações (5) e (7) na equação (4), temos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Considerando a identidade $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \nabla\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J} \qquad (9)$$

que é a equação derivada da Lei de Ampère-Maxwell.

As equações (8) e (9) podem ainda ser simplificadas mediante ao uso de transformações de calibre, ou de *gauge*. Os dois principais calibres são o calibre de Coulomb e o calibre de Lorenz[7], sendo este último conveniente para o nosso caso. Dado o calibre de Lorenz

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

utilizamos-o nas expressões (8) e (9), resultando em

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (10)$$

e

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \qquad (11)$$

Essas expressões são semelhantes à equação de onda não-homogênea, sendo os termos das fontes relacionados à ρ e $\vec{J}$. Resolver essas equações é um trabalho muito importante pois

[7] Demonstramos no Anexo A uma resolução que satisfaz o uso do calibre de Lorenz em nosso contexto.

elas fornecem os potenciais que, por sua vez, determinam os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{B}$. Na sequência, resolvemos estas equações com o intuito de encontrar os campos associados a uma partícula pontual de carga q que se move a uma velocidade $v(t_r)$, onde t_r é chamado de tempo retardado, que leva em conta a velocidade finita da luz, como veremos na sequência em mais detalhes.

2.2 POTENCIAIS E CAMPOS DE LIÉNARD-WIECHERT

Consideremos um caso estático de distribuições de carga ρ e de corrente $\vec{J}$, conforme figura 2:

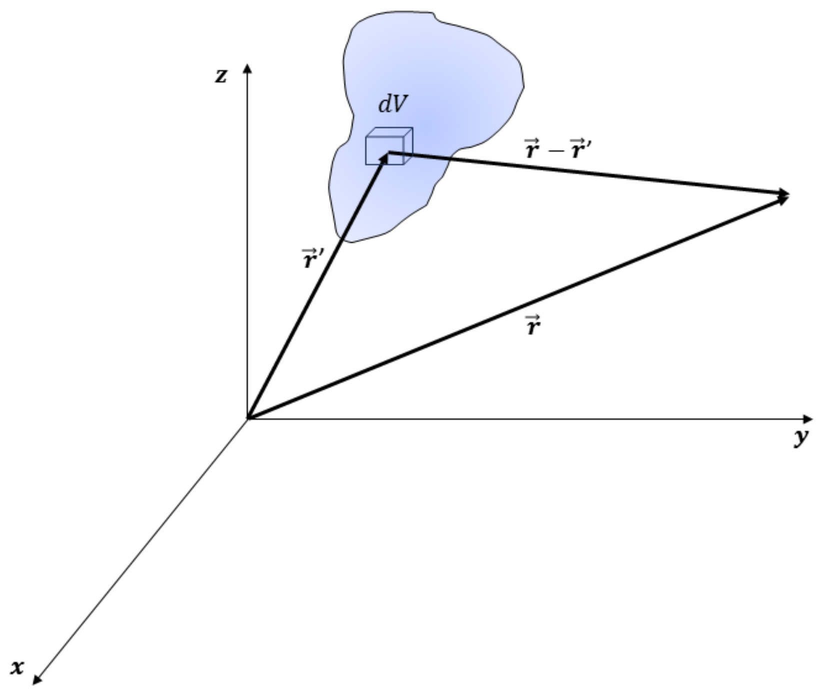


Figura 2 – Distribuição quaisquer de carga e corrente.
Fonte: Adaptado de Machado (2006, p.104).

As equações (10) e (11) são representadas por quatro equações de Poisson (uma para o potencial escalar ϕ e três para o potencial vetor magnético $\vec{A}$), respectivamente

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

cujas soluções são conhecidas por todos os estudantes de eletromagnetismo:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV \tag{12}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV \tag{13}$$

A questão mais relevante a ser discutida para o nosso propósito, é a relatividade que temos suprimida quando estudamos eletrostática e magnetostática. Por motivos de considerarmos os objetos de densidade muito próximos e pelo valor da velocidade da luz ser muito alto, conseguimos satisfatoriamente calcular um potencial adequado para esses sistemas com as equações acima, permitindo que qualquer mudança em sua densidade seja notada instantaneamente no ponto de estudo em questão.

Contudo, o domínio estático é um caso particular do eletromagnetismo. Em um caso mais geral, onde podemos ter uma grande distância dos objetos de densidade em estudo, a informação de quaisquer variações na fonte será notada após um tempo. Essa informação viaja à velocidade da luz c, como já sabemos das deduções das equações de Maxwell.

Uma vez que as fontes estão localizadas nas posições $\vec{r}'$e o ponto de observação destes potenciais situa-se na posição $\vec{r}$, temos que o tempo em que as fontes emitem uma informação e o instante em que ela chega ao ponto de estudo é dado por

$$t' = \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$$

Desta forma, os potenciais estudados no ponto $\vec{r}$ e no instante de tempo t não dependem instantaneamente da configuração de cargas e correntes no tempo t, mas sim de como elas estavam num instante de tempo anterior, quando a informação fora emitida. Chamado de *tempo retardado* t_r, é definido como

$$t_r = t - t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$$

Assim, as equações (12) e (13) quando submetidas ao tempo retardado, ficam

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV \tag{14}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV \tag{15}$$

Os potenciais acima são conhecidos como potenciais retardados[8].

Até o momento apresentamos as soluções para os casos gerais de densidade de carga e corrente. No entanto, estamos interessados na determinação dos potenciais e campos para o caso de uma carga pontual em movimento, que será importante para compreendermos a radiação emitida por esta carga. Portanto, consideremos agora uma partícula de carga Q movendo-se no espaço de modo que sua posição atual seja descrita por $\vec{r}_Q(t)$, conforme o sistema:

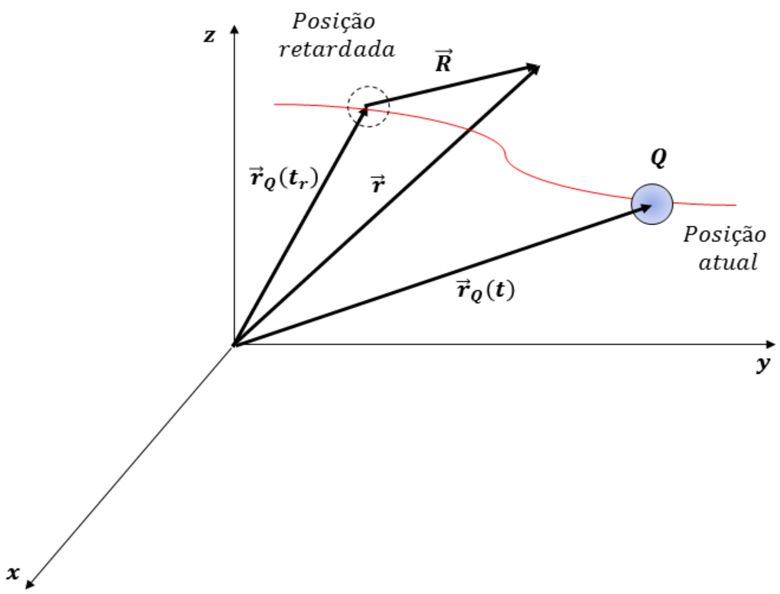


Figura 3 – Grandezas de uma carga pontual em movimento.
Fonte: Adaptado de Machado (2006, p.104).

[8] Desenvolvemos a apresentação dos potenciais retardados de modo lógico, sem resolver explicitamente as equações diferenciais (10) e (11). Normalmente sua solução é realizada por meio de Funções de Green que incorre o uso de artifícios matemáticos que podem tornar difícil a compreensão de um professor formador não familiarizado. Desta forma, no Anexo B, apresentamos uma resolução adequada e que também demonstra a consistência das equações (14) e (15).

O ponto onde queremos determinar os potenciais retardados é indicado por $\vec{r}$ e a posição no tempo retardado é dada por $\vec{r}_Q(t_r)$, de modo que o vetor $\vec{R}$ representa a diferença entre $\vec{r}$ e $\vec{r}_Q(t_r)$ ou seja,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$$

Consequentemente, temos que o tempo retardado é determinado por meio da expressão

$$R = \left|\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)\right| = c(t - t_r)$$

uma vez que R é a distância que a informação transmitida pelos potenciais no tempo t_r deve percorrer para chegar no ponto de observação $\vec{r}$ no tempo t.

A carga dessa partícula é dada por

$$Q = \int_V \rho\left(\vec{r}_Q(t), t_r\right) dV$$

em que $\rho\left(\vec{r}_Q(t), t_r\right)$ é a densidade de carga calculada no tempo retardado t_r. O fato de a partícula estar em movimento faz com que as contribuições de diferentes partes da distribuição de cargas sejam calculadas em tempos retardados $t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|}{c}$ diferentes, alterando assim o valor da carga total observada por um determinado fator geométrico.

A dilatação geométrica produzida pelo movimento de um objeto com velocidade $\vec{v}$ quando é visto na posição $\vec{r}'$ por um observador situado na posição $\vec{r}$ é definida como

$$L' = L\left[1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right]^{-1}$$

onde L é o comprimento do objeto em movimento e L' é o comprimento com que ele é percebido. Desta forma, o volume do objeto é alterado por um fator

$$V' = \frac{V}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

onde $\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ e $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$. Isso faz com que o volume de um corpo em movimento seja

$$dV' = \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

e a carga da partícula

$$\int_V \rho\big(\vec{r}_Q(t), t_r\big) \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

Quando temos um problema envolvendo distribuições contínuas de carga e também cargas pontuais, é conveniente incluir essas cargas na densidade de carga total. Isso pode ser feito por meio do uso de funções delta de Dirac. Se uma dada carga Q está localizada na posição $\vec{r}_Q(t_r)$, a densidade de carga associada a essa carga pode ser escrita como

$$\rho\big(\vec{r}_Q(t), t_r\big) = Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))$$

Integrando a densidade em todo o espaço, teremos a carga total Q:

$$\int \rho\big(\vec{r}_Q(t), t_r\big) = Q \int \delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))$$

Onde, por definição temos

$$\int \delta(x - x_0)dx = 1$$

Portanto,

$$\int \rho\big(\vec{r}_Q(t), t_r\big) = Q$$

De modo que temos

$$\int_V \frac{Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} dV = \frac{Q}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

agora $\hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|}$ e $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}(t_r)}{c}$ sendo calculados no tempo retardado. Podemos então calcular o potencial retardado mediante a

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}_Q(t), t_r\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)\right|} dV$$

Substituindo os fatores, teremos

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))}{\left|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)\right|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \tag{16}$$

Que é o potencial retardado para uma partícula pontual de carga Q movendo-se no espaço com velocidade $\vec{v}(t_r)$ no tempo retardado t_r.

Podemos encontrar o potencial vetor magnético dessa partícula partindo da equação (15):

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Para isso, precisamos determinar a densidade de corrente de um elemento de carga. Sabendo que

$$dQ = \rho dV = \rho dA\left|d\vec{l}\right|$$

onde dA é a área perpendicular ao movimento de carga dQ no volume $dA\left|d\vec{l}\right|$, sendo $\left|d\vec{l}\right|$ na mesma direção que dQ. Derivando com relação ao tempo, temos

$$\frac{dQ}{dt} = \rho dA \frac{|d\vec{l}|}{dt}$$

Sabendo que a corrente i pode ser definida como a quantidade de carga sobre o tempo e que a velocidade da partícula v desloca-se na taxa $\frac{|d\vec{l}|}{dt}$, temos

$$di = \rho dAv$$

De modo que a densidade de corrente na forma vetorial pode ser definida como

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$
$$\vec{J}(\vec{r}_Q(t), t_r) = \rho(\vec{r}_Q(t), t_r)\vec{v}(t_r)$$

De forma semelhante ao desenvolvimento anterior, o potencial vetor magnético resulta em

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{r}_Q(t), t_r)\vec{v}(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|}\frac{dV}{1 - \hat{R}\cdot\vec{\beta}}$$
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))\vec{v}(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|}\frac{dV}{1 - \hat{R}\cdot\vec{\beta}}$$
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\vec{v}(t_r)}{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}} \tag{17}$$

Que pode ser reescrito como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}\vec{v}(t_r)$$

Sabendo que $c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$, temos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}\frac{\vec{v}(t_r)}{c^2}$$

Lembrando que o potencial escalar encontrado é

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}$$

De modo que o potencial vetor magnético pode ser

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}(t_r)}{c^2}\phi(\vec{r},t) \tag{18}$$

Os potenciais retardados dados pelas equações (16) e (17)-(18) são conhecidos como potenciais de Liénard-Wiechert para uma carga pontual em movimento. Partindo destes potenciais, podemos determinar os campos elétrico e magnético dessa partícula utilizando as definições (6) e (7)

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

A resolução dos campos demanda uma extensa articulação algébrica que, para facilitar a leitura, disponibilizamo-la no Anexo C. O campo elétrico de Liénard-Wiechert resulta em

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{(\vec{R}-R\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\left[R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^3} + \frac{\vec{R}\times\left[(\vec{R}-R\vec{\beta})\times\frac{\vec{\alpha}}{c}\right]}{\left[R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^3}\right\} \tag{19}$$

e o campo magnético fica

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}\left\{\frac{(\vec{\beta}\times\vec{R})(1-\beta^2)}{\left[R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^3} + \frac{(\vec{\beta}\times\vec{R})\left(\vec{R}\cdot\frac{\vec{\alpha}}{c}\right)}{\left[R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^3} + \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c}\times\vec{R}}{\left[R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^2}\right\}$$

ou ainda

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{c} \tag{20}$$

onde $\vec{\alpha} = \frac{\vec{a}}{c}$, sendo $\vec{a}$ a aceleração da partícula e $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$, sendo $\vec{v}$ sua velocidade.

A partir desses campos, podemos encontrar a Fórmula de Larmor, referente a emissão de energia da partícula ao executar um movimento acelerado.

2.3 A FÓRMULA DE LARMOR

Para as discussões desta seção, vamos analisar a equação (19) que descreve o campo elétrico produzido por uma carga em movimento. Podemos ver que temos dois fatores, o primeiro deles é dependente apenas da velocidade da partícula $\vec{v} = c\vec{\beta}$, enquanto o segundo termo depende também de sua aceleração $\vec{a} = c\vec{\alpha}$. Por este motivo, o primeiro deles é conhecido como campo elétrico de velocidade e o segundo é o campo de aceleração.

Para a nossa análise inicial, vamos separar esses campos. Iniciamos com o campo elétrico de velocidade, que pode ser reescrito como (Machado, 2006):

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{v}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R\left(\hat{R} - \vec{\beta}\right)(1-\beta^2)}{\left[R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^2 \left[R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{v}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\hat{R} - \vec{\beta}\right)(1-\beta^2)}{\left[R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^2 \left[1 - \hat{R}\cdot\vec{\beta}\right]} \tag{21}$$

Essa equação mostra que o campo elétrico de velocidade possui dependência com o inverso do quadrado da distância a partir da fonte, que é o comportamento usual do campo elétrico coulombiano. O campo elétrico da aceleração, contudo, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}\right]}{\left[R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^3}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2\hat{R}\times\left[\left(\hat{R}-\vec{\beta}\right)\times\frac{\vec{\alpha}}{c}\right]}{\left[R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]^2\left[1-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}\times\left[\left(\hat{R}-\vec{\beta}\right)\times\frac{\vec{\alpha}}{c}\right]}{\left[1-\hat{R}\cdot\vec{\beta}\right]^2\left[R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right]} \tag{22}$$

De modo que ele tem dependência com o inverso da distância. Isso quer dizer que a grandes distâncias da carga, a parcela dominante é o campo elétrico de aceleração. Por causa disso, esse campo é importante também na emissão de radiação por partículas carregadas e, deste modo, é conhecido também como campo elétrico de radiação. Para os nossos propósitos, é interessante apresentar uma representação geométrica disso:

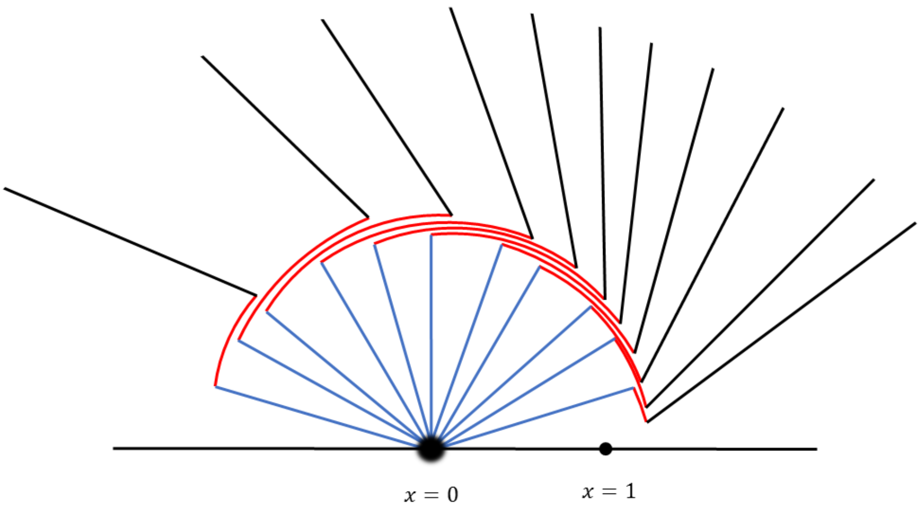


Figura 4 – Campo criado por uma partícula com carga em movimento.
Fonte: Adaptado de Rybicki e Lightman (1985, p.81).

A partícula da imagem movia-se a velocidade constante ao sentido negativo do eixo x até o momento em que desacelera e estaciona em $x = 0$. A seção das linhas de campo de cor preta corresponde ao campo emitido pela partícula quando ela estava na posição $x = 1$ e a seção azul corresponde ao momento estacionado. A descrição física desses momentos é dada pela equação (20), onde o campo decai com $1/R^2$. A figura 4 mostra também que nestas duas regiões, as linhas de campo elétrico de velocidade propagam-se radialmente à partícula pois sua aceleração é nula.

A seção vermelha, no entanto, está relacionada ao campo de aceleração (ou desaceleração) da partícula, representado pela equação (22), e mostra como a aceleração pode dar origem a um campo transversal proporcional a $1/R$. Podemos observar também que na região de transição o campo transversal é muito mais intenso (linhas de fluxo compactadas) do que os campos radiais, sendo consistente com a Lei de Gauss e a conservação de fluxo. Por este motivo, seguimos nossa dedução da fórmula de Larmor pela equação do campo elétrico de radiação.

Para entender como essa radiação é emitida de uma carga pontual, consideremos o caso não relativístico ($\vec{\beta} << 1$). A equação (22) se reduz a

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\hat{R}\times\left(\hat{R}\times\vec{a}\right)}{R}$$

Sabendo que o duplo produto vetorial é expresso pela identidade

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} \qquad (23)$$

temos

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\left(\hat{R}\cdot\vec{a}\right)\hat{R} - \left(\hat{R}\cdot\hat{R}\right)\vec{a}}{R}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\left(\hat{R}\cdot\vec{a}\right)\hat{R} - \vec{a}}{R}$$

Precisamos da noção de fluxo de energia emitida por esta partícula, o que nos demanda fazer

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}^{\,2}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r},t)\cdot\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r},t)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}^{\,2}(\vec{r},t) = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^{\,2}c^4R^2}\left[\left(\hat{R}\cdot\vec{a}\right)\hat{R} - \vec{a}\right]\cdot\left[\left(\hat{R}\cdot\vec{a}\right)\hat{R} - \vec{a}\right]$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}^{\,2}(\vec{r},t) = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^{\,2}c^4R^2}\left[\left(\hat{R}\cdot\vec{a}\right)^2 - 2\left(\hat{R}\cdot\vec{a}\right)^2 + a\right]$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}^{\,2}(\vec{r},t) = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^{\,2}c^4R^2}\left[a - \left(\hat{R}\cdot\vec{a}\right)^2\right]$$

Considerando que o ângulo entre $\hat{R}$ e $\vec{a}$ é dado por θ, temos

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}{}^{2}(\vec{r},t) = \frac{Q^2}{16\pi^2{\epsilon_0}^2c^4R^2}\left[a^2 - a^2cos^2\theta\right]$$

Sabendo que $cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$, temos

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}{}^{2}(\vec{r},t) = \frac{Q^2a^2}{16\pi^2{\epsilon_0}^2c^4R^2}sen^2\theta \qquad (24)$$

Para continuar, precisamos manipular a definição do vetor de Poynting, que é familiar a todo estudante de eletromagnetismo:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{\mathcal{E}} \times \vec{B}$$

Utilizando (20) na expressão acima

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{\mathcal{E}} \times \left[\frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{c}\right]$$

Novamente usando a propriedade (23), temos

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}\right)\hat{R}(t_r) - \left(\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{R}(t_r)\right)\vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\left\{\mathcal{E}^2\hat{R}(t_r) - \left[\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{R}(t_r)\right]\vec{\mathcal{E}}\right\}$$

Como o campo elétrico é ortogonal a $\hat{R}(t_r)$, temos

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{\mathcal{E}}^2\hat{R}(t_r)$$

Aplicando a equação (24)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\frac{Q^2 a^2}{16\pi^2 {\epsilon_0}^2 c^5 R^2} sen^2\theta \hat{R}(t_r)$$

Sabendo que $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, e então $c^4 = \frac{1}{{\mu_0}^2 {\epsilon_0}^2}$, temos

$$\vec{S} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c R^2} sen^2\theta \hat{R}(t_r) \tag{25}$$

É interessante notar que, dada a dependência do $sen^2\theta$, a máxima emissão de radiação da partícula em movimento acelerado se dá perpendicularmente ao seu movimento, ou seja, para $\theta = \pi/2$, caindo gradativamente ao longo da decomposição até que não haja emissão na direção de seu movimento ($\theta = 0$).

Para continuarmos, vamos retornar às componentes estabelecidas na figura 3. Calcularemos a potência total emitida pela partícula em movimento considerando a potência emitida na posição retardada, isto é, em $\vec{r}_q(t_r)$. A potência fica

$$P(t_r) = \frac{dW}{dt_r}$$

Utilizando a regra da cadeia, temos

$$P(t_r) = \frac{dW}{dt}\frac{\partial t}{\partial t_r} = P(t)\frac{\partial t}{\partial t_r} \tag{26}$$

Precisamos agora encontrar uma expressão que melhor represente $\frac{\partial t}{\partial t_r}$. Lembrando que $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$, temos

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)\right) = -\frac{\partial \vec{r}_q(t_r)}{\partial t}$$

Utilizando, novamente, a regra da cadeia da função composta

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{r}_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\vec{v}\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

Onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula na posição retardada. Podemos reescrever da seguinte forma

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -(\hat{R}\cdot\vec{v})\frac{\partial t_r}{\partial t} \tag{27}$$

uma vez que $\vec{v}$ pode ser decomposto em $\hat{R}$. Lembrando que $\vec{R} = R\hat{R}$ e $R = c(t - t_r)$, podemos ter

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[c(t - t_r)] = c\left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right) \tag{28}$$

Aplicando (26) e (27) em (28), temos

$$-(\hat{R}\cdot\vec{v})\frac{\partial t_r}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right)$$

Ou

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} - (\hat{R}\cdot\vec{\beta})\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1$$
$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - (\hat{R}\cdot\vec{\beta})}$$

Substituindo esse resultado em (26), temos

$$P(t_r) = P(t)\left[1 - (\hat{R}\cdot\vec{\beta})\right] \tag{29}$$

Com esse resultado, podemos seguir para o cálculo da potência total emitida pela partícula. Reiterando que o vetor de Poynting representa o fluxo de energia por unidade de área e tempo, consideramos uma casca esférica de raio R centrada na posição da partícula. O vetor de Poynting pode ser escrito da seguinte forma

$$\left(\vec{S}\cdot\hat{R}\right)=\frac{dP(t)}{dA}$$

onde $dA = R^2 d\Omega$ e $d\Omega = \ sen\theta d\theta d\phi$ representa um elemento infinitesimal do ângulo sólido, de modo que

$$\left(\vec{S}\cdot\hat{R}\right)R^2=\frac{dP(t)}{d\Omega}$$

Tomando a derivada de (29) em relação ao ângulo sólido, temos

$$\frac{\partial P(t_r)}{\partial\Omega}=\frac{\partial}{\partial\Omega}P(t)\left[1-\left(\hat{R}\cdot\vec{\beta}\right)\right]$$
$$\frac{\partial P(t_r)}{\partial\Omega}=\left[1-\left(\hat{R}\cdot\vec{\beta}\right)\right]\left(\vec{S}\cdot\hat{R}\right)R^2$$

Aplicando (25) nessa equação, temos

$$\frac{\partial P(t_r)}{\partial\Omega}=\left[1-\hat{R}\cdot\vec{\beta}\right]\frac{\mu_0Q^2a^2}{16\pi^2c}sen^2\theta$$

De modo que podemos integrar por toda a superfície da esfera:

$$\oint_S\partial P(t_r)=\oint_S\left[1-\hat{R}\cdot\vec{\beta}\right]\frac{\mu_0Q^2a^2}{16\pi^2c}sen^2\theta d\Omega$$

Para o nosso caso, $\vec{\beta}\to 0$, portanto

$$P=\oint_S\frac{\mu_0Q^2a^2}{16\pi^2c}sen^2\theta d\Omega$$

e, assim,

$$P = \oint_S \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} sen^3\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c}(2\pi)\frac{1}{3}cos^3\theta \begin{matrix} \pi \\ 0 \end{matrix}$$

Encontramos a fórmula de Larmor

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{6\pi c}$$

Sabendo que $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ e a adequando para o nosso propósito $Q \rightarrow e$, temos

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{30}$$

A fórmula de Larmor é usada para calcular a potência total irradiada por uma partícula com carga pontual não relativística à medida que ela acelera, de modo que pode ser definida também como perda de energia ao longo do tempo, e é muito importante em variados contextos. Utilizaremos essa equação em nossa dedução para encontrar a função que descreve a trajetória espiral de um elétron em direção ao núcleo no domínio da eletrodinâmica clássica.

2.4 FUNÇÃO DE TRAJETÓRIA DO ELÉTRON AO NÚCLEO

O modelo atômico de Rutherford é de nosso interesse para deduzir a função que procuramos. Nele, temos um núcleo positivo e elétrons relativamente distante que estabilizam o átomo eletricamente. Iniciamos com a dinâmica do átomo de Hidrogênio, onde temos apenas um elétron orbitando o núcleo. Por conveniência, iremos assumir inicialmente uma órbita estável, assim como mostra a figura abaixo.

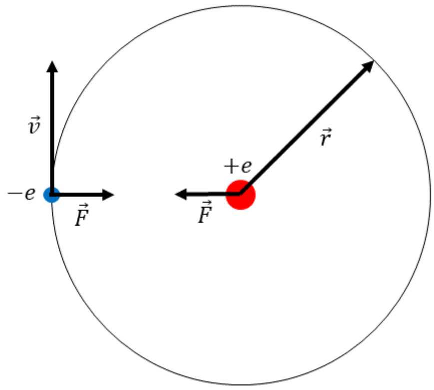


Figura 5 – Órbita estável do átomo de Hidrogênio.
Fonte: Adaptado de Beiser (2003, p.124).

Para uma órbita circular estável temos como condição a igualdade da força elétrica entre as partículas e a força centrípeta,

$$\overrightarrow{F_e} = \overrightarrow{F_c}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Multiplicando a igualdade por $\frac{r}{2}$, encontramos:

$$\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} = \frac{mv^2}{2} \quad (31)$$

A Energia total desse sistema é a soma entre a energia cinética e a energia potencial elétrica, de modo que

$$E = K + U$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \quad (32)$$

Lembrando que o sinal negativo de U corresponde a escolha de $U = 0$ quando $r \to \infty$. Aplicando (31) em (32),

$$E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

$$E(r) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Encontramos uma expressão para a variação da energia em função do raio da órbita. O sinal negativo dessa função demonstra que o sistema está ligado. Dessa forma, temos que a energia desse sistema está em função de $r = r(t)$. Vamos entender em que taxa isso ocorre, iniciando pela sua derivada

$$\frac{dE}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}\right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{33}$$

A energia total do sistema depende de uma função composta, pois está em função de sua variação em relação a r e em relação ao tempo, de modo que devemos prosseguir com a regra da cadeia:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

Substituindo as equações (30) e (33) na expressão acima, encontramos

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\left(\frac{8\pi\epsilon_0r^2}{e^2}\right) = -\frac{4}{3}\frac{a^2r^2}{c^3}$$

Sabendo que existe uma perda de energia pela emissão de radiação, vamos deduzir a função de órbita, ou seja, $r(t)$.

Pela Lei da Dinâmica de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, temos

$$ma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

E, portanto

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2{\epsilon_0}^2m^2c^3r^2}$$

Para encontrar $r(t)$ devemos integrar a igualdade, de modo que

$$\int r^2 dr = -\int \frac{e^4}{12\pi^2{\epsilon_0}^2 m^2 c^3} dt$$

$$\frac{r^3}{3} = -\frac{e^4}{12\pi^2{\epsilon_0}^2 m^2 c^3} t + C$$

Considerando a condição inicial $r(t = 0) = r_0$, obtemos $C = {r_0}^3/3$. Portanto,

$$\frac{r^3}{3} = -\frac{e^4}{12\pi^2{\epsilon_0}^2 m^2 c^3} t + \frac{{r_0}^3}{3}$$

Multiplicando a igualdade por três e a elevando a potência de $1/3$, encontramos a função de órbita

$$r(t) = \left({r_0}^3 - \frac{e^4}{4\pi^2{\epsilon_0}^2 m^2 c^3} t\right)^{1/3} \tag{34}$$

Assim, vemos que a trajetória do elétron é uma espiral. A colisão ocorrerá quando a equação (34) zerar, isto é, quando o tempo decorrido for

$$t = \frac{4\pi^2{\epsilon_0}^2 m^2 c^3 {r_0}^3}{e^4}$$

Com a função (34), conseguimos demonstrar a trajetória espiral do elétron em direção ao núcleo:

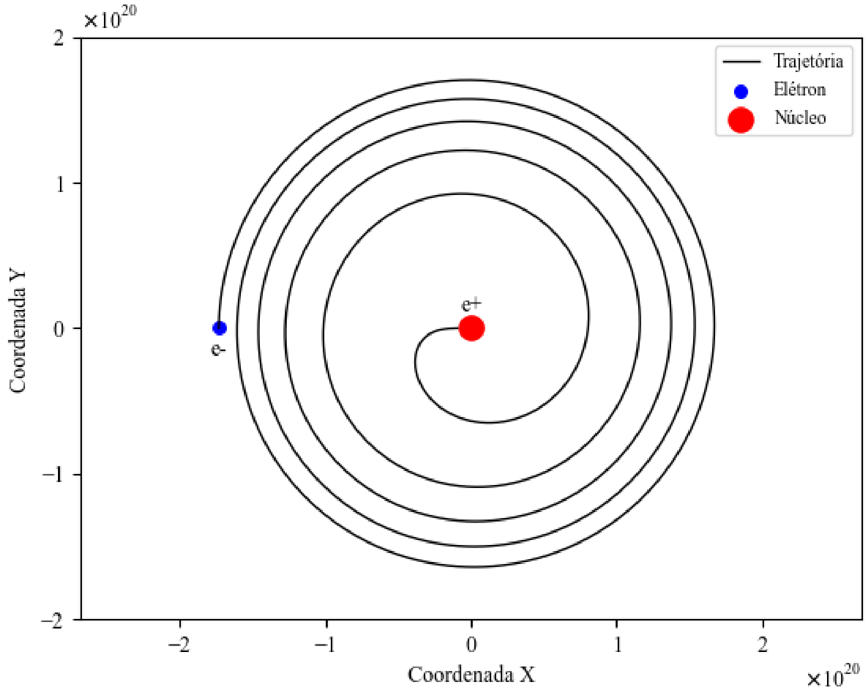


Figura 6 – Trajetória em espiral do elétron em direção ao núcleo[9].
Fonte: dos autores (2024).

Encontramos a função (34) que descreve a trajetória espiral do elétron em direção ao núcleo do átomo de Hidrogênio. Mas, precisamos enfatizar que, tomando o elétron como uma partícula clássica, essa colisão ocorre à medida que sua aceleração provoca a emissão de energia desse sistema. No entanto, o elétron não é uma partícula clássica. As leis da física que são válidas no mundo macroscópico não possuem validade no mundo microscópico e, portanto, átomos não colapsam.

No início do século passado esse foi um tema de intensa discussão entre os físicos que procuravam compreender a estrutura da matéria em sua menor escala. Foi descoberto que, quanto mais fundamental se investigasse o objeto de estudo, menos as leis do mundo clássico eram eficazes em explicar a natureza. A instabilidade da estrutura atômica que vimos nessa seção foi o principal motivo que afastou os físicos da teoria atômica de Rutherford, mas também motivou Bohr a apresentar os fundamentos de seu modelo atômico à luz do *quantum* de ação de Planck e assim progredir nossa compreensão da física da matéria (Raicik, 2023).

> A física clássica falha em fornecer uma análise significativa da estrutura atômica porque aborda a natureza em termos de partículas "puras" e ondas "puras". Na realidade, partículas e ondas têm muitas propriedades em comum, embora a pequenez da constante de Planck torne a dualidade onda-partícula imperceptível no macromundo. **A utilidade da física clássica diminui à medida que a escala dos fenômenos em estudo diminui**, e devemos considerar o comportamento de partícula

[9] Exageramos propositalmente o número de voltas da órbita para que o efeito espiral seja evidente.

> das ondas e o comportamento de onda das partículas para entender o átomo. [...] Só quando considerarmos o átomo do ponto de vista da mecânica quântica, que não faz concessões às noções intuitivas que adquirimos em nossa vida diária, encontraremos uma teoria realmente bem-sucedida do átomo (Beiser, 2003, p.127).

A analogia que será apresentada nos próximos capítulos é viável porque as massas envolvidas são macroscópicas e são compreendidas classicamente pela teoria da Relatividade Geral. Veremos que, assim como uma carga elétrica acelerada emite radiação eletromagnética, uma massa acelerada emite radiação gravitacional. Diferentemente da refutação do modelo atômico de Rutherford, que previa o colapso do átomo de hidrogênio devido à perda de energia por radiação, essa instabilidade de fato ocorre no contexto gravitacional. A coalescência de sistemas binários já foi evidenciada desde a década de 1970, sendo a radiação gravitacional observada diretamente em setembro de 2015.

3. RADIAÇÃO GRAVITACIONAL SEM RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo, temos como objetivo apresentar em profundidade a teoria proposta por Hilborn (2018) em que relaciona os domínios eletromagnético e gravitacional. Deduzimos o potencial vetor e o campo equivalentes para o caso gravitacional a partir da análise de um sistema de binárias coalescentes. A partir disto, apresentamos uma expressão que descreve a energia total emitida pelo sistema, que é equivalente a fórmula de Larmor para este domínio, e então, a função que descreve a trajetória espiral até a colisão desses corpos. Com o intuito de adequar ainda mais a analogia, mostraremos que a função que descreve as trajetórias pode ser modificada para a trajetória de apenas um corpo, como sugeriram Nascimento e Cuzinatto (2022).

Mas, antes, precisamos estabelecer as seguintes modificações de equivalência nas expressões da eletrodinâmica para o contexto gravitacional:

Eletrodinâmica	**Gravitacional**
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$
$\frac{\mu_0}{4\pi}$	$-\frac{G}{c^2}$
$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}_Q(t),t_r\right)}{\left\lvert\vec{r}-\vec{r}_Q(t)\right\rvert}dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\left\lvert\vec{r}-\vec{r}_{Qi}(t_i)\right\rvert}$	$\phi_G(\vec{r},t) = -G\sum_i \frac{m_i}{\left\lvert\vec{r}-\vec{r}_{Qi}(t_i)\right\rvert}$
$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}_Q(t),t_r\right)}{\left\lvert\vec{r}-\vec{r}_Q(t)\right\rvert} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \frac{q_i\vec{v}_i(t_r)}{\left\lvert\vec{r}-\vec{r}_{Qi}(t_i)\right\rvert}$	$\vec{A}_G(\vec{r},t) = -\frac{G}{c^2}\sum_i \frac{m_i\vec{v}_i(t_r)}{\left\lvert\vec{r}-\vec{r}_{Qi}(t_i)\right\rvert} \qquad (35)$

Tabela 1 – Relações de equivalência.
Fonte: dos autores (2024).

Os sinais negativos da constante gravitacional G aparecem devido à natureza apenas atrativa da gravidade. Além disso, nos potenciais escalar e vetor a carga q é substituída pela massa m, e a densidade de corrente $q\vec{v}$ é substituída pela corrente de massa $m\vec{v}$.

No capítulo anterior, nosso objetivo foi deduzir a função que descreve a trajetória em espiral de um elétron até a colisão com o núcleo dada pela eletrodinâmica clássica. Procuramos apresentar o texto de forma a revisar o conteúdo para os professores já familiarizados com o tema, mas também com o intuito de aprofundamento dos conteúdos trabalhados na disciplina de eletromagnetismo (física básica). E, portanto, encontramos os potenciais escalar e vetor por meio da escolha de calibre mais usual, o calibre de Lorenz.

Neste capítulo, é conveniente trabalharmos com a escolha de calibre de Coulumb. Como veremos adiante, as ondas gravitacionais são ondas transversais e esse calibre nos possibilita separar a corrente em componentes transversais e longitudinais do potencial vetor. Acontece que os campos produzidos pelas componentes longitudinais da corrente são proporcionais ao gradiente da derivada temporal do potencial escalar (Brill e Goodman, 1967; Hilborn, 2018). Isto é, as componentes longitudinais se eliminam com o gradiente do potencial escalar pela equação

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dessa forma, vamos definir o campo gravitacional que queremos encontrar como sendo a variação temporal das parcelas transversais do potencial vetor, de modo que teremos

$$\vec{g}_{rad} \equiv -\frac{\partial \vec{A}_{Gtrans}}{\partial t}$$

É importante destacar que poderíamos usar o calibre de Lorenz e conseguiríamos o mesmo resultado. Como vimos no capítulo anterior, longe da fonte, as contribuições do potencial escalar caem com o inverso do quadrado da distância enquanto os campos de radiação caem com o inverso da distância, de modo que teríamos apenas as contribuições transversais.

3.1 POTENCIAL VETOR E CAMPO GRAVITACIONAL PARA UMA BINÁRIA

No capítulo dois utilizamos as imagens das figuras 2 e 3 para representar os vetores em relação a origem. Iniciamos essa seção seguindo da mesma forma. O sistema binário, portanto, pode ser representado da seguinte maneira:

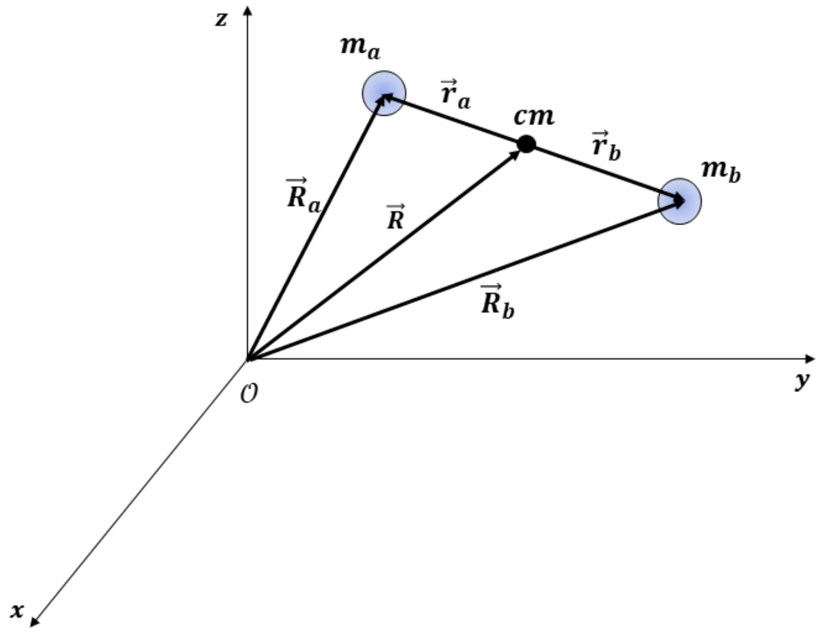


Figura 7 – Sistema de coordenadas para uma binária.
Fonte: adaptado de Nascimento e Cuzinatto (2022).

Na Figura 7, temos a massa m_a, seu respectivo vetor partindo da origem do sistema de coordenadas $\vec{R}_a$ e sua distância $\vec{r}_a$ ao centro de massa cm do sistema que está situado a uma distância $\vec{R}$ da origem. De forma espelhada, os vetores correspondentes a massa m_b. Vale ressaltar que o observador se encontra na origem.

Nesse primeiro momento, vamos encontrar uma expressão para $\vec{R}_a$ e $\vec{R}_b$. Prosseguimos adaptando nosso problema à Lei dos Cossenos, de modo que obtemos para m_a a seguinte representação:

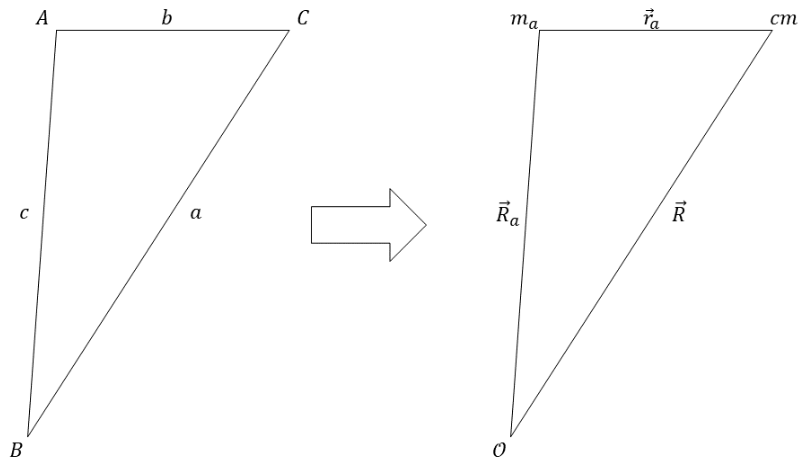


Figura 8 – Lei dos cossenos aplicada a binária.
Fonte: dos autores (2024).

Sabemos que a Lei dos Cossenos é um teorema fundamental da geometria euclidiana e que podemos utilizá-la para encontrar o comprimento de um lado de um triângulo qualquer. Para o nosso caso, vamos encontrar c, de modo que teremos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\hat{C}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Substituindo os termos de nosso problema, obtemos

$$R_a{}^2 = R^2 + r_a{}^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}_a$$

Podemos encontrar uma expressão ainda mais conveniente dividindo todos esses termos por R^2, assim

$$\frac{R_a{}^2}{R^2} = \frac{R^2}{R^2} + \frac{r_a{}^2}{R^2} - \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}_a}{R^2}$$
$$R_a = R\sqrt{1 - \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}_a}{R^2} + \frac{r_a{}^2}{R^2}}$$

Neste momento, é razoável assumirmos que $R \gg r_a$, em outras palavras, o observador se encontra numa distância muito maior que a distância entre a massa e o centro de massa do sistema. Assim, encontramos

$$R_a = \left[R - R\left(\frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}_a}{R^2}\right)\right]^{1/2} = R\left[1 - \left(\frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}_a}{R^2}\right)\right]^{1/2}$$

Para prosseguir, utilizamos a técnica de expansão binomial. A expansão binomial é uma técnica algébrica para expandir expressões do tipo $(a + b)^n$, onde a e b são números ou variáveis, e n é um número inteiro positivo. O resultado é uma soma de termos que são potências de a e b multiplicadas por coeficientes binomiais. Essa técnica é muito útil para problemas em que b é muito menor que a, sendo os primeiros termos resultantes da expressão uma boa aproximação para o nosso caso. Portanto, dada a expansão binomial

$$(1+z)^n \approx 1+nz$$

Obtemos,

$$R_a = R\left[1-\left(\frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}_a}{R^2}\right)\right]^{1/2}$$
$$R_a \approx R\left[1-\left(\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}_a}{R^2}\right)\right]$$
$$R_a \approx R-\left(\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}_a}{R}\right)$$

Lembrando que $\hat{R}=\frac{\vec{R}}{R}$, temos

$$R_a \approx R-\hat{R}\cdot\vec{r}_a$$

Com uma expressão semelhante para R_b:

$$R_b \approx R-\hat{R}\cdot\vec{r}_b$$

Mantendo os termos que serão suficientes para nosso propósito, temos

$$R_a \approx \hat{R}\cdot\vec{r}_a$$
$$R_b \approx \hat{R}\cdot\vec{r}_b$$

Agora que encontramos uma expressão para R_a e R_b, podemos iniciar o trabalho para encontrarmos as expressões para o potencial vetor e campo gravitacional para a binária. Resgatando a equação (35) do início do capítulo, temos como potencial vetor para a binária a seguinte expressão

$$\vec{A}_G(\vec{R},t) = -\frac{Gm_a\vec{v}_a(t_{Ra})}{c^2R_a(t_{Ra})}-\frac{Gm_b\vec{v}_b(t_{Rb})}{c^2R_b(t_{Rb})} \quad (36)$$

Vamos expressar as velocidades em termos do centro de massa no tempo retardado:

$$\Delta t = t - t_0 = \left(t - \frac{R_a}{c}\right) - \left(t - \frac{R}{c}\right) = \frac{1}{c}(R - R_a) \approx \frac{1}{c}\left(\hat{R} \cdot \vec{r}_a\right)$$

A diferença apresentada acima pode ser entendida da seguinte forma: o momento (t) em que houve alterações na fonte do problema, foi percebido por observadores distantes apenas em outro instante de tempo (t_0), isto é, a informação não é instantânea!

Usando a expansão na série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}\bigg|_{x_0} (x - x_0)^n = f(x_0) + (x - x_0)\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x_0} + \cdots$$

Teremos, expandindo $\vec{v}_a(t - R_a/c)$ sobre o tempo $t - R/c$, isto é, referente a diferença que encontramos,

$$\vec{v}_a\left(t - \frac{R_a}{c}\right) = \vec{v}_a\left(t - \frac{R}{c}\right) + \frac{d\vec{v}_a}{dt}\bigg|_{t-\frac{R}{c}} \Delta t + \cdots$$

Lembrando que podemos escrever

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\omega^2 \vec{r}_a$$

Aplicando essas considerações em $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$ na equação (36), obtemos

$$\vec{A}_G(\vec{R}, t) = -\frac{Gm_a}{c^2 R_a}\left[\vec{v}_a\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{1}{c}\left(\hat{R} \cdot \vec{r}_a\right)\omega^2 \vec{r}_a\right] - \frac{Gm_b}{c^2 R_b}\left[\vec{v}_b\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{1}{c}\left(\hat{R} \cdot \vec{r}_b\right)\omega^2 \vec{r}_b\right]$$

Dadas as grandes distâncias do sistema binário ao observador em relação a distância das massas ao centro de massa do sistema, podemos considerar que $R \approx R_a \approx R_b$. Assim, fazendo a distributiva das massas nos termos respectivos, encontramos

$$\vec{A}_G(\vec{R}, t) = -\frac{G}{c^2 R}\left[m_a \vec{v}_a - \frac{m_a}{c}\left(\hat{R} \cdot \vec{r}_a\right)\omega^2 \vec{r}_a\right] - \frac{G}{c^2 R}\left[m_b \vec{v}_b - \frac{m_b}{c}\left(\hat{R} \cdot \vec{r}_b\right)\omega^2 \vec{r}_b\right]$$

Rearranjando para os termos semelhantes,

$$\vec{A}_G(\vec{R},t) = -\frac{G}{c^2R}[m_a\vec{v}_a + m_b\vec{v}_b] + \frac{G\omega^2}{c^2R}\left[\frac{m_a}{c}(\hat{R}\cdot\vec{r}_a)\vec{r}_a + \frac{m_b}{c}(\hat{R}\cdot\vec{r}_b)\vec{r}_b\right] \quad (37)$$

Quando somamos os momentos lineares de cada massa no primeiro termo entre colchetes, notamos que eles se cancelam por simetria do sistema. Assim, percebemos que o momento linear líquido de uma binária é zero, resultando apenas o segundo termo:

$$\vec{A}_G(\vec{R},t) = \frac{G\omega^2}{c^3R}\left[m_a\vec{r}_a(\hat{R}\cdot\vec{r}_a) + m_b\vec{r}_b(\hat{R}\cdot\vec{r}_b)\right] \quad (38)$$

Neste ponto, é interessante discutir o resultado acima. Distribuições de cargas podem ser entendidas como uma soma de distribuições particulares e são associadas aos multipolos. Uma partícula pontual com carga produz um potencial que decai com o inverso da distância, ou seja, $1/r$. Sabemos de nossos estudos de eletromagnetismo que podemos chamar essa partícula de monopolo por possuir apenas um sinal de carga a ela atribuído. Sobretudo, compreendemos que o mesmo ocorre quando analisamos a dinâmica de duas partículas com sinais de carga opostos, no caso o dipolo elétrico, cujo potencial decai com $1/r^2$. Em nível de física básica, conhecemos em pouca profundidade outras distribuições espaciais de partículas com cargas que também emitem radiação, como por exemplo o quadrupolo, onde o potencial decai com $1/r^3$.

Esses termos são conhecidos ao realizar a expansão de multipolos pela aproximação de $|\vec{r} - \vec{r}'|$ da equação (12), por exemplo. O primeiro termo cai com o inverso da distância e resulta em um escalar constante, a carga Q. O segundo termo que cai com o inverso do quadrado da distância, retorna um vetor, o conhecido momento de dipolo $\vec{p} = q\vec{d}$, onde $\vec{d}$ é o vetor distância entre as cargas. O terceiro termo, que cai com o inverso do cubo da distância, retorna um vetor de segunda ordem, também conhecido como tensor de quadrupolo $\overrightarrow{\overrightarrow{I_{ij}}}$.

No caso eletromagnético, a contribuição dominante para produção de ondas eletromagnéticas é atribuída ao dipolo elétrico, pois este é o termo de menor grau em que surge um momento que varia no tempo. Ao contrário do que o senso comum pode nos levar a entender, duas partículas com carga gravitacional e que formam uma relação de “dipolo gravitacional”, não possuem este termo como dominante para a produção de ondas gravitacionais.

O mesmo procedimento de expansão de multipolos pode ser feito para o domínio gravitacional, onde $Q \rightarrow M$. Neste caso, o segundo termo da expansão resulta em um momento constante, pois como adiantamos, a conservação do momento elimina as componentes análogas por simetria. Portanto, o termo dominante para o caso gravitacional vem do momento de quadrupolo[10].

Podemos adequar ainda mais a equação (38) se relacionarmos $\vec{r}_b$ e $\vec{r}_a$ com o centro de massa do sistema. Como pode ser visto em (Moyses, p.151),

$$\vec{r}_a = \frac{m_b \vec{r}}{m_a + m_b}; \vec{r}_b = -\frac{m_a \vec{r}}{m_a + m_b}$$

De forma que teremos

$$\vec{A}_G(\vec{R}, t) = \frac{G\omega^2}{c^3 R}\left[\frac{m_a m_b \vec{r}}{m_a + m_b}\left(\frac{m_b \vec{r}}{m_a + m_b} \cdot \hat{R}\right) + \frac{m_a m_b \vec{r}}{m_a + m_b}\left(\frac{m_a \vec{r}}{m_a + m_b} \cdot \hat{R}\right)\right]$$

$$\vec{A}_G(\vec{R}, t) = \frac{G\omega^2}{c^3 R}\frac{m_a m_b}{(m_a + m_b)^2}(m_a + m_b)\left[\vec{r}\left(\hat{R} \cdot \vec{r}\right)\right]$$

Definindo a massa total do sistema como $M = m_a + m_b$ e $\eta = \frac{m_a m_b}{(m_a + m_b)^2}$, encontramos

$$\vec{A}_G(\vec{R}, t) = \frac{G\eta M\omega^2}{c^3 R}\left[\vec{r}\left(\hat{R} \cdot \vec{r}\right)\right] \tag{39}$$

A combinação ηM é a massa reduzida do sistema e é muito interessante destacar que ela aparece naturalmente no contexto em que estamos trabalhando. Mais adiante, utilizaremos seu conceito para adequar a nossa analogia entre o eletromagnetismo e a gravitação.

Podemos deixar a equação para o potencial vetor em um formato ainda mais transparente. Primeiro, vamos lembrar de algumas definições que são trabalhadas na formação inicial de todo professor de física. Consideremos a representação a seguir:

[10] Não é interessante para o nosso propósito apresentar as deduções referentes a expansão de multipolos, mas sugerimos a leitura de Schutz (1984) onde são apresentadas explicitamente.

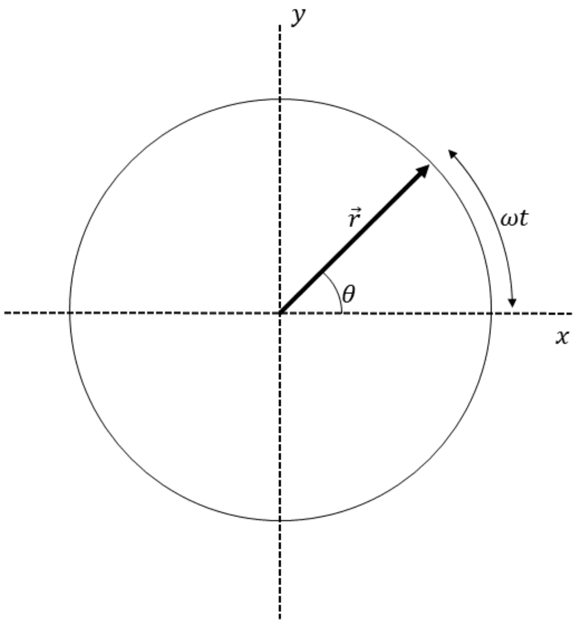


Figura 9 – Representação para a frequência angular.
Fonte: dos autores (2024).

Sabemos que podemos definir a variação do ângulo da figura acima como sendo o produto entre a frequência angular e o tempo:

$$\Delta\theta = \omega t$$

Além disso, o raio do sistema orbital, ou seja, a distância da massa ao eixo de rotação, pode ser definido como

$$\vec{r} = rcos\theta\hat{x} + rsen\theta\hat{y} \tag{40}$$

Unindo as duas expressões, ficamos com

$$\vec{r} = rcos(\omega t)\hat{x} + rsen(\omega t)\hat{y}$$

Aplicando essas considerações na equação (39), encontramos

$$\vec{A}_G(\vec{R}, t) = \frac{G\eta M\omega^2}{c^3 R} r^2 \left[(cos(\omega t_R)\hat{x} + sen(\omega t_R)\hat{y})(\hat{R} \cdot (cos(\omega t_R)\hat{x} + sen(\omega t_R)\hat{y})\right]$$

Por conveniência, vamos tomar como referência o versor $\hat{x}$ do plano orbital xy (ver figura 9), de modo que o ângulo entre o versor que indica a direção do observador $\hat{R}$ e o versor de referência $\hat{y}$ não possui relevância para nossos propósitos. Assim, realizando a distributiva do termo restante entre colchetes,

$$\vec{A}_G(\vec{R},t) = \frac{G\eta M\omega^2 r^2}{c^3 R}[cos^2(\omega t_R)\hat{x} + cos(\omega t_R)sen(\omega t_R)\hat{y}](\hat{R}\cdot\hat{x})$$

Podemos reescrever a expressão acima se considerarmos as seguintes identidades trigonométricas:

$$cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ ;\cos(\theta)sen(\theta) = \frac{sen(2\theta)}{2}$$

Ajustando-as à expressão, encontramos

$$\vec{A}_G(\vec{R},t) = \frac{G\eta M\omega^2 r^2}{2c^3 R}[(1+\cos(2\omega t_R))\hat{x} + sen(2\omega t_R)\hat{y}](\hat{R}\cdot\hat{x}) \qquad (41)$$

É importante destacar que os termos que são dependentes do tempo oscilam duas vezes a frequência angular orbital. Em outras palavras, o campo de ondas gravitacionais oscila com o dobro da frequência orbital da binária, o que é característico da radiação de quadrupolo (Hilborn, 2018, p. 190; Horvath, 2022, p.207).

Para expressar o potencial vetor em coordenadas transversais relativa à direção do observador, precisamos fazer a troca para coordenadas esféricas, isto é, $(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \to (\hat{R},\hat{\theta},\hat{\phi})$. Apesar de ser um pouco laboriosa, é interessante apresentarmos sua dedução aqui. Iniciamos extrapolando o sistema da figura 9 para um sistema em três coordenadas, de modo que o vetor $\vec{r}$ se preserva, bem como seu plano xy coincida com o plano $\hat{x}\hat{y}$. Em outras palavras, o plano orbital da binária está representado no plano $\hat{x}\hat{y}$ da figura abaixo e o observador se encontra no sentido de $\hat{R}$.

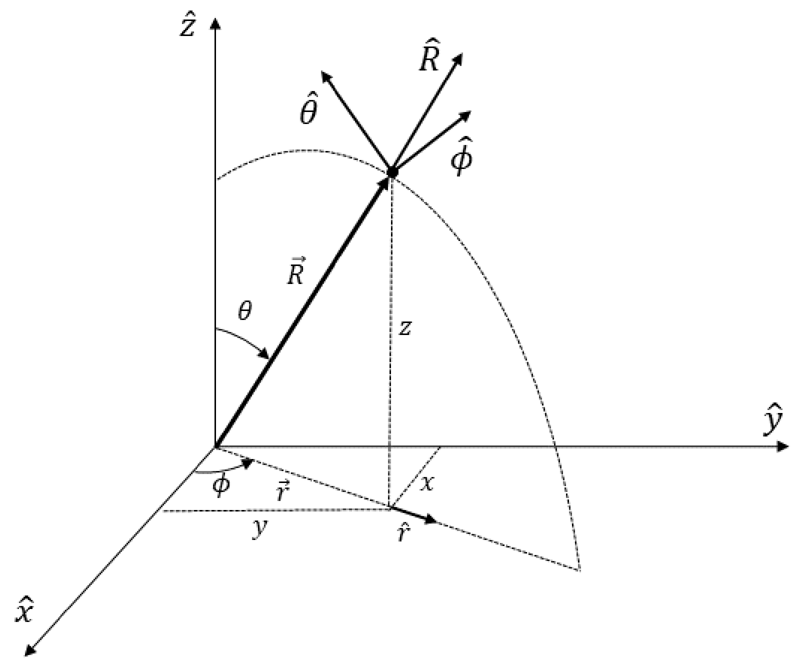


Figura 10 – Representação sistema de coordenada esféricas.
Fonte: adaptado de Machado (2000, p.52).

Na figura 10 temos que os vetores unitários $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ orientam-se na direção tangencial de abertura dos ângulos entre os eixos correspondentes. Como ressaltado anteriormente, escolhemos como referência o versor $\hat{x}$ do plano orbital. Assim, podemos extrair as coordenadas do sistema

$$\vec{R} = \begin{cases} x = Rsen\theta cos\phi \\ y = Rsen\theta sen\phi \\ z = Rcos\theta \end{cases}$$

onde $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, ou seja,

$$\vec{R} = Rsen\theta cos\phi\hat{x} + Rsen\theta sen\phi\hat{y} + Rcos\theta\hat{z}$$

Lembrando que $\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R}$, temos

$$\hat{R} = \frac{Rsen\theta cos\phi\hat{x} + Rsen\theta sen\phi\hat{y} + Rcos\theta\hat{z}}{\sqrt{R^2sen^2\theta cos^2\phi + R^2sen^2\theta sen^2\phi + R^2cos^2\theta}}$$

Ou ainda

$$\hat{R} = \frac{sen\theta cos\phi\hat{x} + sen\theta sen\phi\hat{y} + cos\theta\hat{z}}{\sqrt{sen^2\theta(cos^2\phi + sen^2\phi) + cos^2\theta}}$$

Podemos usar a identidade $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$, portanto

$$\hat{R} = sen\theta cos\phi\hat{x} + sen\theta sen\phi\hat{y} + cos\theta\hat{z}$$

Para determinar $\hat{\theta}$ devemos tomar a derivada de $\hat{R}$, de modo que:

$$\hat{\theta} = \frac{\partial\hat{R}}{\partial\theta} = cos\theta cos\phi\hat{x} + cos\theta sen\phi\hat{y} - sen\theta\hat{z}$$

De modo semelhante, devemos tomar a derivada de $\hat{r}$ para determinar $\hat{\phi}$. Sabendo que $\vec{r} = r\hat{r}$, ou seja, $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, temos que

$$\hat{r} = cos\phi\hat{x} + sen\phi\hat{y} + 0\hat{k}$$

Portanto,

$$\hat{\phi} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = -\,sen\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y}$$

Reunindo os vetores unitários que encontramos,

$$\begin{cases} \hat{R} = sen\theta cos\phi\hat{x} + sen\theta sen\phi\hat{y} + cos\theta\hat{z} \\ \hat{\theta} = cos\theta cos\phi\hat{x} + cos\theta sen\phi\hat{y} - sen\theta\hat{z} \\ \hat{\phi} = -\,sen\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y} \end{cases}$$

Identificando as componentes, temos

$$\hat{x} = sen\theta cos\phi\hat{R} + cos\theta cos\phi\hat{\theta} - sen\phi\hat{\phi}$$

$$\hat{y} = sen\theta sen\phi\hat{R} + cos\theta sen\phi\hat{\theta} + cos\phi\hat{\phi}$$

Como escolhemos os termos nos referenciando em $\hat{x}$, vamos optar por $\phi = 0$ de modo que podemos focar apenas nos termos transversais $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$. Assim, encontramos

$$\hat{x} = sen\theta\hat{R} + cos\theta\hat{\theta}$$
$$\hat{y} = \hat{\phi}$$

Da equação (41), temos ainda que resolver $\hat{R} \cdot \hat{x}$. Analisando a figura 10, podemos ver que

$$\hat{R} \cdot \hat{x} = sen\theta cos\phi = sen\theta$$

Aplicando essas alterações na equação (41), ficamos com

$$\vec{A}_{trans} = \frac{G\eta M\omega^2 r^2}{2c^3 R}\left[\left(sen\theta\hat{R} + cos\theta\hat{\theta}\right)(1 + \cos(2\omega t_R)) + sen(2\omega t_R)\hat{\phi}\right]sen\theta$$

Lembrando que estamos interessados nas componentes transversais, portanto podemos ignorar $sen\theta\hat{R}$. Assim,

$$\vec{A}_{trans}\left(\vec{R}, t\right) = \frac{G\eta M\omega^2 r^2}{2c^3 R} sen\theta\left[cos\theta(1 + \cos(2\omega t_R))\,\hat{\theta} + sen(2\omega t_R)\hat{\phi}\right] \qquad (42)$$

Este é o potencial vetor gravitacional de binárias adequado para coordenadas transversais que estamos interessados. Para obter o campo gravitacional de radiação correspondente a binária, lembramos da definição que estabelecemos no início do capítulo:

$$\vec{g}_{rad} \equiv -\frac{\partial \vec{A}_{Gtrans}}{\partial t}$$

Desta forma, precisamos derivar a equação (42). Para o primeiro termo, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t}[(sen\theta\cos\theta\cos(2\omega t_R))]\hat{\theta} = -\omega sen(2\theta)sen(2\omega t_R)\hat{\theta}$$

E para o outro termo,

$$\frac{\partial}{\partial t}[sen\theta sen(2\omega t_R)]\hat{\phi} = \omega 2sen(\theta)\cos(2\omega t_R)\hat{\phi}$$

Reunindo esses resultados, encontramos

$$\vec{g}_{rad} = -\frac{G\eta M\omega^2 r^2}{2c^3 R}\left[-\omega sen(2\theta)sen(2\omega t_R)\hat{\theta} + \omega 2sen(\theta)\cos(2\omega t_R)\hat{\phi}\right]$$

E, portanto

$$\vec{g}_{rad} = \frac{G\eta M\omega^3 r^2}{2c^3 R}\left[sen(2\theta)sen(2\omega t_R)\hat{\theta} - 2sen(\theta)\cos(2\omega t_R)\hat{\phi}\right]$$

Que é o campo de radiação gravitacional para binárias. Podemos ainda, expressar este campo em termos da terceira Lei de Kepler:

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} \tag{43}$$

Assim,

$$\vec{g}_{rad} = \frac{\eta(GM)^{5/2}}{2c^3 R(r)^{5/2}}\left[sen(2\theta)sen(2\omega t_R)\hat{\theta} - 2sen(\theta)\cos(2\omega t_R)\hat{\phi}\right]$$

$$\vec{g}_{rad} = \frac{\eta(GM)^{5/3}\omega^{5/3}}{2c^3 R}\left[sen(2\theta)sen(2\omega t_R)\hat{\theta} - 2sen(\theta)\cos(2\omega t_R)\hat{\phi}\right] \tag{44}$$

Nessa equação temos algo muito interessante para a compreensão de ondas gravitacionais. Em nossas primeiras aulas de ondulatória na graduação, aprendemos que uma função de propagação de onda é criada pelo produto de dois termos: um termo de amplitude e outro termo oscilatório. A equação para o campo de radiação gravitacional da binária que encontramos também apresenta isso, onde vale destacar que o termo de amplitude depende unicamente da frequência orbital ω do sistema. Ou seja, conforme a distância entre as estrelas que compõem a binária diminui, sua frequência orbital aumenta juntamente com sua amplitude. Mais tarde, precisaremos dessa noção para a compreensão dos gráficos gerados pelas detecções de ondas gravitacionais.

3.2 POTÊNCIA TOTAL EMITIDA PELA BINÁRIA

No capítulo anterior, manipulamos o vetor de Poynting para encontrar a fórmula de Larmor, onde passamos pela seguinte expressão

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{\mathcal{E}}^2 \hat{R}(t_r)$$

Adaptando-a para o propósito estabelecido no início deste capítulo, é mais interessante que utilizemos a noção da média do fluxo de energia por unidade de tempo, logo,

$$\langle \vec{S}_G \rangle = \frac{c}{4\pi G}\langle {\vec{g}_{rad}}^{\,2} \rangle \hat{R}(t_r)$$

Tomando o quadrado do campo que encontramos na equação (44), o vetor de Poynting fica

$$\langle \vec{S}_G \rangle = \frac{c}{4\pi G}\langle \vec{g}_{rad} \cdot \vec{g}_{rad} \rangle$$

E, portanto, temos

$$\vec{S}_G = \frac{G(\eta M)^2 \omega^6 r^4}{16\pi c^5 R^2}\left[sen^2(2\theta) sen^2(2\omega t_R) + 4 sen^2(\theta)\cos^2(2\omega t_R)\right]$$

Podemos usar $\langle \cos^2(2\omega t_R) \rangle = \langle sen^2(2\omega t_R) \rangle = 1/2$, pois essa média é para um ângulo que varia de zero a 2π. Isso significa que, ao calcular seno e cosseno para todos os valores possíveis do ângulo nesse intervalo e tirar a média desses valores, o resultado será $1/2$ (Rybicki e Lightman, 1985). Teremos, portanto

$$\vec{S}_G = \frac{G(\eta M)^2\omega^6 r^4}{32\pi c^5 R^2}[sen^2(2\theta) + 4sen^2(\theta)]$$

Da mesma forma que fizemos para a eletrodinâmica, devemos integrar a equação acima sobre uma superfície esférica de raio R e então teremos a potência total emitida pela binária. Portanto, resgatando a equação

$$(\vec{S}\cdot\hat{R})R^2 = \frac{dP(t)}{d\Omega}$$

E a adequando para o nosso propósito, temos

$$\oint_S \partial P(t_r) = \frac{G(\eta M)^2\omega^6 r^4}{32\pi c^5}\oint_S [sen^2(2\theta) + 4sen^2(\theta)]d\Omega$$

Lembrando que $d\Omega = sen\theta d\theta d\phi$

$$\int_0^{\pi}[sen^2(2\theta) + 4sen^2(\theta)]sen\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{64\pi}{5}$$

A integral acima é mais laboriosa que a do caso eletromagnético, em virtude disso, disponibilizamos sua resolução no Apêndice. Temos como solução

$$P_G = \frac{dE}{dt} = \frac{G(\eta M)^2\omega^6 r^4}{32\pi c^5}\frac{64\pi}{5} = \frac{2}{5}\frac{G(\eta M)^2\omega^6 r^4}{c^5}$$

$$\frac{dE}{dt} = N\frac{G(\eta M)^2\omega^6 r^4}{c^5} \qquad (45)$$

É importante pontuar que a equação (45) difere da teoria da Relatividade Geral linearizada apenas pelo fator numérico, isto é, encontramos $N = 2/5$, enquanto na Relatividade Geral este fator é $N = 32/5$ (Hilborn, 2018).

Além disso, Nascimento e Cuzinatto (2022, p.13) também encontram uma expressão semelhante à (44) por meio de análise dimensional, mas destacam que "não [conhecem] uma forma de determinar a constante [N] com base na física básica da graduação sem empregar a Relatividade Geral [...]", e então utilizam o mesmo valor numérico deduzido por esta teoria.

Destacamos isso pois, embora nos aprofundemos um pouco na eletrodinâmica, o trabalho desenvolvido por Hilborn (2018) possibilita que trabalhemos noções da física de ondas gravitacionais sem a Relatividade Geral na formação de professores de física pelo emprego de uma teoria sólida e, por isso, pode contribuir com sua aprendizagem por meio de diversas possibilidades de ensino.

No capítulo a seguir, apresentamos a abordagem didática que desenvolvemos para ser aplicada à licenciatura em física.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como discutimos anteriormente, na analogia eletromagnética, a produção de ondas gravitacionais ocorre por meio da dinâmica de massas que fazem oscilar o momento de quadrupolo do sistema binário. Neste capítulo, temos como objetivo apresentar nossa analogia entre a eletrodinâmica e a gravitação centrada em seu ensino na formação inicial de professores de física. Iremos deduzir uma função que descreve a trajetória espiral de buracos negros coalescentes de forma muito semelhante àquela que foi desenvolvida no segundo capítulo desse trabalho.

Além disso, mostraremos algumas características das ondas gravitacionais que conseguimos obter relacionando a teoria que vimos de Hilborn (2018), o trabalho desenvolvido por Nascimento e Cuzinatto (2022) e os dados da primeira detecção de ondas gravitacionais (Abbott *et al*., 2016), como por exemplo, a massa de *Chirp* do sistema, a massa total da binária, as massas individuais, a massa irradiada e o raio inicial até a colisão dos buracos negros. Ao final, sintetizamos nossa proposta em uma sequência didática e a analisamos sob a ótica das regras da transposição didática apresentadas no capítulo 1, discutindo as possibilidades e desafios das ondas gravitacionais tornarem-se um objeto a ser ensinado por meio da analogia entre a eletrodinâmica e a gravitação.

4.1 FUNÇÃO DAS TRAJETÓRIAS ESPIRAIS DA BINÁRIA

De forma muito semelhante à dedução da função de trajetória espiral no caso eletromagnético que mostramos no capítulo 2, onde obtivemos a função (34), apresentamos nessa seção a dedução dessa função análoga para o domínio gravitacional. Vale destacar que Hilborn (2018) também encontrou essa função por deduções semelhantes à que abordaremos aqui.

Iniciamos estabelecendo o sistema conforme a figura 11:

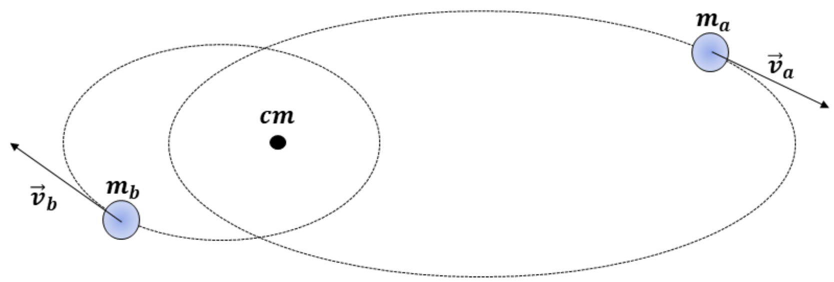


Figura 11 – Órbitas da binária
Fonte: adaptado de Horvath (2022, p.207).

Onde consideramos a massa m_b mais próxima do centro de massa e a massa m_a em uma órbita maior. Referente à analogia, destacamos que m_a é equivalente ao elétron e m_b ao próton para o caso da eletrodinâmica clássica. Por este motivo, vamos aproximar a massa m_b ao centro de massa do sistema, de modo que sua velocidade orbital não seja nula. Fazendo isso, vamos considerar uma órbita circular estável para m_a, ou seja, da mesma forma que desenvolvemos no domínio eletromagnético, devemos igualar a força atrativa, neste caso a força gravitacional entre as massas, e a força centrípeta exercida sobre m_a:

$$\overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{F_c}$$

$$G\frac{m_a m_b}{r^2} = \frac{m_a {v_a}^2}{r_a}$$

Assim, temos para a velocidade de m_a

$${v_a}^2 = G\frac{m_b}{r^2} r_a$$

Como definimos r_a no capítulo 3, o substituímos nessa expressão, resultando

$${v_a}^2 = G\frac{m_b}{r^2}\left(\frac{m_b \vec{r}}{m_a + m_b}\right)$$

$${v_a}^2 = G\frac{{m_b}^2}{(m_a + m_b)r}$$

Existindo uma expressão equivalente para a massa m_b. De posse dessa expressão, podemos calcular a energia mecânica total do sistema binário,

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_a {v_a}^2 + \frac{1}{2}m_b {v_b}^2 - G\frac{m_a m_b}{r}$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_a\left[G\frac{{m_b}^2}{(m_a + m_b)r}\right] + \frac{1}{2}m_b\left[G\frac{{m_a}^2}{(m_a + m_b)r}\right] - G\frac{m_a m_b}{r}$$

$$E_{mec} = G\frac{{m_b}^2 m_a}{2r(m_a + m_b)} + G\frac{{m_a}^2 m_b}{2r(m_a + m_b)} - G\frac{m_a m_b}{r}$$

Fatorando os termos de energia cinética, a expressão acima pode ser simplificada. Temos,

$$E_{mec} = G\frac{m_a m_b}{2r(m_a + m_b)}(m_a + m_b) - G\frac{m_a m_b}{r}$$

$$E_{mec} = G\frac{m_a m_b}{2r} - G\frac{m_a m_b}{r}$$

$$E_{mec}(r) = -G\frac{m_a m_b}{2r} \tag{46}$$

Conforme o sistema binário irradia energia em forma de ondas gravitacionais, a energia mecânica diminui (devido ao sinal negativo), o que resulta na diminuição da distância entre as massas. Isso também significa, pela equação (44), que a frequência orbital do sistema aumenta.

Para entender como a taxa em que essa energia varia conforme a distância r entre as massas diminui, derivamos a função (46)

$$\frac{dE}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-G\frac{m_a m_b}{2r}\right) = G\frac{m_a m_b}{2r^2}$$

Tal como no eletromagnetismo, podemos obter a taxa de variação temporal da energia,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

$$\frac{dr}{dt} = -N\frac{G(\eta M)^2\omega^6 r^4}{c^5}\left(\frac{2r^2}{Gm_a m_b}\right) = -\frac{2N\eta(GM)^3}{c^5 r^3} \tag{47}$$

Podemos reescrever a equação acima em termos do raio de Schwarzschild, que pode ser definido como a fronteira além da qual nada pode escapar da atração gravitacional, nem mesmo a luz:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{48}$$

onde $M = m_a + m_b$. Dessa forma, r_s corresponde a soma dos raios de Schwarzschild das massas individuais. Manipulando a equação (48), obtemos

$$\frac{c{r_s}^3}{8} = \frac{(GM)^3}{c^5}$$

Substituindo na equação (47), temos

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{N\eta c}{4}\left(\frac{r_s}{r}\right)^3 \tag{49}$$

Essa expressão coloca o raio de Schwarzschild como escala de variação da distância entre as massas, isto é, conforme $r \to r_s$ a taxa de variação da distância entre as massas aumenta dramaticamente. Pela Relatividade Geral, nos instantes finais da coalescência, as massas alcançam velocidades orbitais dentro de um regime relativístico (Hilborn, 2018), o que não é verdade para a teoria que estamos trabalhando aqui.[11] Em outras palavras, a teoria desenvolvida por Hilborn (2018) nos elucida a dinâmica de coalescência de uma binária em espiral até o momento em que as massas se tocam (pois consideramos a soma dos raios de Schwarzschild das massas individuais) e, sabendo que esta é uma teoria para fins didáticos do fenômeno, consideramos uma boa aproximação.

Com isso, podemos integrar a equação (49) e encontrar a função:

$$\int r^3 dr = -\int \frac{N\eta c{r_s}^3}{4} dt$$

[11] O próprio trabalho de Hilborn (2018) mostra uma sobreposição dos gráficos gerados pela teoria da relatividade geral numérica e da teoria que desenvolvera, mostrando que há uma conversão entre as teorias no início da coalescência, mas no momento em que a amplitude de oscilação inicia uma ascensão abrupta (o conhecido *chirp*) do sinal obtido pelo Ligo-Virgo do evento GW150914, esta teoria não é tão adequada quanto a teoria da relatividade geral (ver figura 14).

$$\frac{r^4}{4} = -\frac{N\eta c {r_s}^3}{4} t + C$$

Definindo a constante de integração como $\frac{{r_0}^4}{4}$, onde r_0 corresponde a distância entre as massas quando $t = 0$,

$$\frac{r^4}{4} = -\frac{N\eta c {r_s}^3}{4} t + \frac{{r_0}^4}{4}$$

Multiplicando a igualdade por quatro e a elevando à potência de $1/4$, encontramos

$$r(t) = ({r_0}^4 - N\eta c {r_s}^3 t)^{1/4} \tag{50}$$

Para fins didáticos, é interessante notar a semelhança, não apenas das equações (34) e (50), mas também de suas próprias resoluções. Notamos também que para o caso eletromagnético, temos uma função de ordem três e, para o caso gravitacional, quatro. Isso se deve à natureza quadrupolar da radiação gravitacional, como comentamos anteriormente.

De posse da função (50), podemos visualizar as trajetórias espirais da binária em torno do centro de massa. Apenas para fins de ilustração, é melhor que mostremos a função plotada com o resultado relativístico $N = 32/5$:

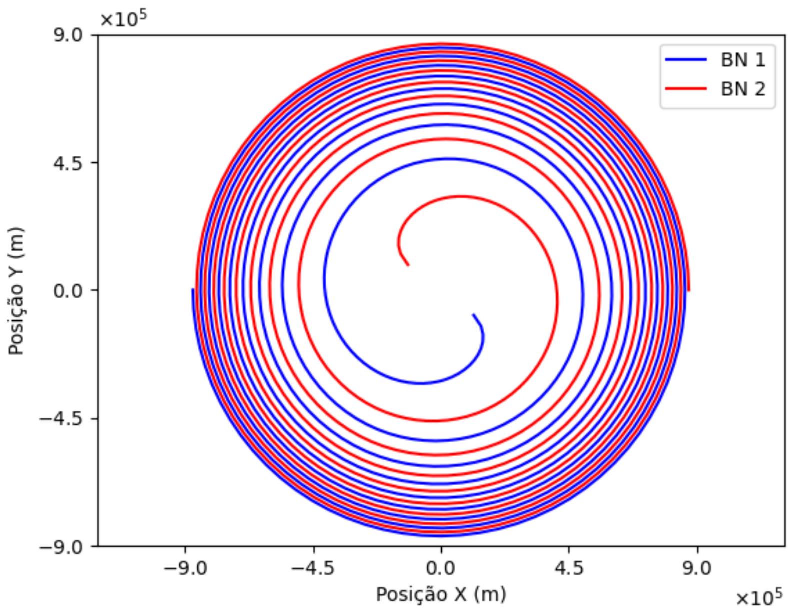
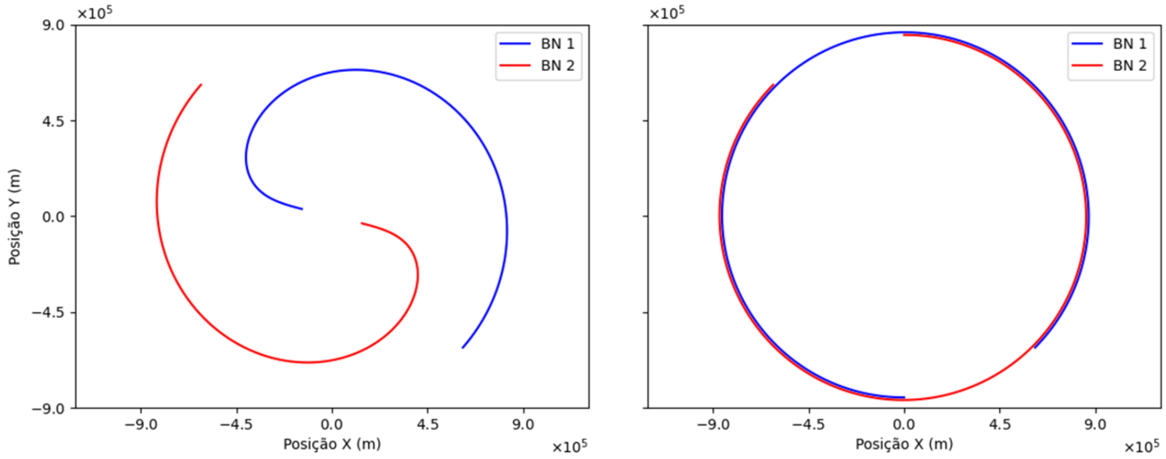


Figura 12 – Trajetórias coalescentes da binária.
Fonte: dos autores (2024).

Chamamos m_a de BN1 (referente a Buraco Negro 1) e m_b de BN2 (Buraco Negro 2).

Como a teoria de Hilborn (2018) deduz um fator numérico de $N = 2/5$, é interessante que apresentamos essa comparação. Para visualizar a diferença mais facilmente, mantemos a escala, mas reduzimos a quantidade de voltas da binária, de modo que teremos:



($\boldsymbol{a}$) ($\boldsymbol{b}$)

Figura 13 – Comparação entre a coalescência da binária utilizando (a) $N = 32/5$ e (b) $N = 2/5$.
Fonte: dos autores (2024).

Os dados utilizados para criar estes gráficos serão deduzidos nas próximas seções.

Com a figura 13 fica evidente que a utilização do fator numérico extraído das soluções da relatividade geral adequa mais precisamente a teoria ao que de fato é observado na coalescência de uma binária. Podemos notar que no início da órbita, a utilização de ambos os fatores numéricos satisfaz a mesma trajetória para as massas.

Além disso, quando analisamos a comparação entre o modelo desenvolvido por Hilborn (2018) e o modelo oriundo da relatividade geral para o sinal detectado do evento GW150914 (vide figura 17), podemos ver em que momento as teorias divergem.

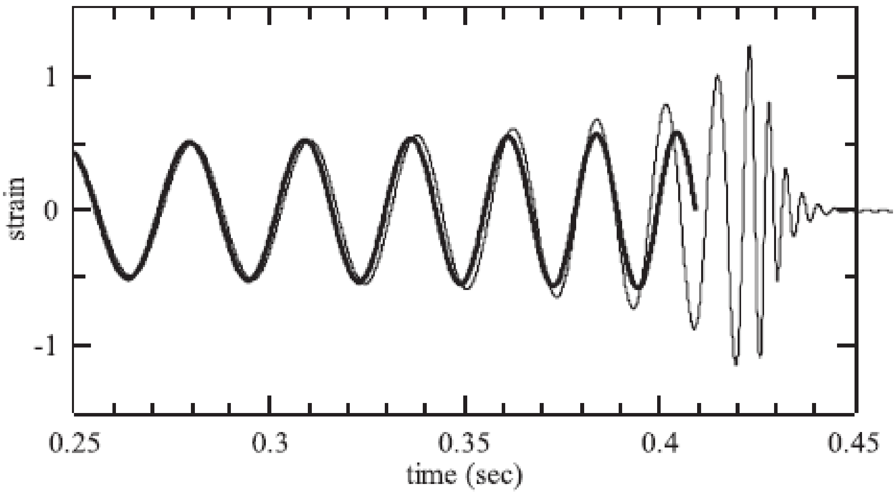


Figura 14 – Comparação entre o cálculo numérico da relatividade geral do sinal de deformação LIGO-VIRGO (curva fina) e o modelo desenvolvido por Hilborn (2018) (curva grossa) para $N = 32/5$.
Fonte: Hilborn (2018, p.195).

A concordância entre as teorias nos momentos iniciais da coalescência é surpreendente, considerando principalmente as potencialidades didáticas da teoria de Hilborn. Elas divergem apenas nos milissegundos finais da deteção, onde ocorrem o *merger* e o momento de *ring-down* (vide figura 18).

Da mesma maneira que no caso eletromagnético, podemos estimar o tempo de colisão entre as massas manipulando a equação (50), de modo que teremos

$$t = \frac{{r_0}^4}{N\eta c {r_s}^3}$$

Com o intuito de tornar a analogia ainda mais próxima entre o sistema do caso gravitacional ao caso eletromagnético, podemos recorrer a uma particularidade de problemas que trabalham com a massa reduzida. É possível, como apontam Nussenzveig (2002, p.217) e Nascimento e Cuzinatto (2022, p.09), reduzir o sistema de duas partículas a um sistema de uma única partícula fictícia de massa igual à massa reduzida. Desta forma, teremos uma única partícula orbitando o centro de massa, como mostra a figura 15:

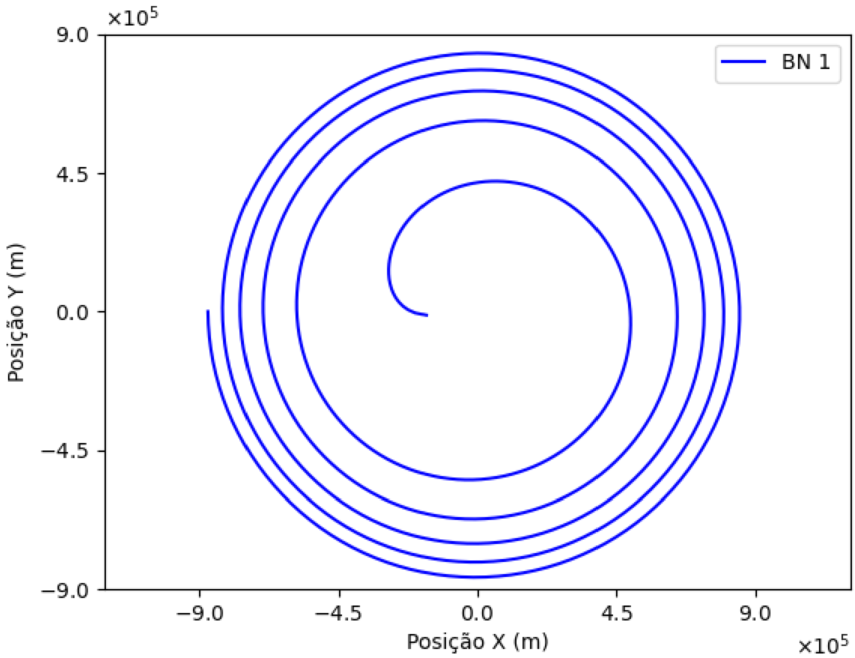


Figura 15 – Trajetória espiral da massa reduzida em direção ao centro de massa, utilizando $N = 32/5$.
Fonte: dos autores (2024).

Reiteramos a semelhança da figura 15 com a figura 6 do caso eletromagnético. A massa reduzida possibilita, portanto, uma aproximação teórica e visual significativa da proposta de analogia que estamos apresentando nesse trabalho, e sabemos que isso pode ser importante para o contexto didático, como veremos mais profundamente ao analisar essa proposta pela ótica da teoria da transposição didática.

Para fins comparativos, vejamos como essa órbita se comporta com $N = 32/5$ e $N = 2/5$. Novamente, mantemos a escala, mas reduzimos o número de voltas para facilitar a visualização:

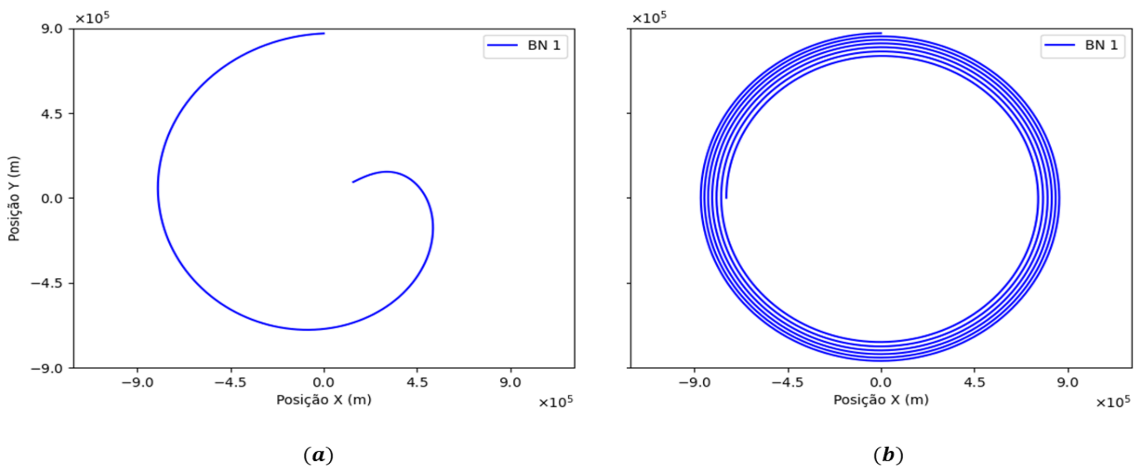


Figura 16 – Comparação entre a trajetória da massa reduzida utilizando (a) $N = 32/5$ e (b) $N = 2/5$.
Fonte: dos autores (2024).

De modo semelhante e esperado, temos que as trajetórias coincidem no início da órbita.

É claro que a teoria de Hilborn (2018) só fora desenvolvida após as confirmações empíricas das ondas gravitacionais. Mas é importante lembrar que antes mesmo do desenvolvimento da teoria da relatividade geral de Einstein, que é uma teoria tensorial e que permitiu tais detecções, as ondas gravitacionais foram discutidas por físicos como Heaviside e Poincaré por meio de analogias com o eletromagnetismo, que por sua vez é uma teoria vetorial (Hilborn, 2018; Garcia e Camillo, 2022). Justamente por possuir um grau diferente de interpretação da gravidade, a teoria da relatividade geral nos fornece características e interpretações de fenômenos que, de forma geral, só serão superadas por uma teoria que os contemple e também nos dê novas predições que sejam empiricamente confirmadas.

Portanto, percebemos que a escolha do fator numérico para a equação (44) é determinante para termos uma maior precisão da analogia. Desta forma, nos assegurando que saibamos dessa diferença, não vemos problemas em utilizar o fator numérico previsto pela teoria da relatividade geral ($N = 32/5$), ao invés do valor deduzido pela teoria de Hilborn ($N = 2/5$).

Encontramos, com a figura 15, uma representação para a órbita de uma partícula fictícia com a massa reduzida em relação ao centro de massa. A partir da função (50), conseguimos demonstrar algumas características do sistema binário coalescente e da radiação gravitacional por ele emitida.

4.2 CARACTERÍSTICAS OBTIDAS A PARTIR DA FUNÇÃO

Nesta seção, nos dedicamos a encontrar algumas características da radiação gravitacional emitida pelo sistema binário, bem como de sua própria dinâmica. Comentamos, na seção anterior, que os dados utilizados para realização dos gráficos apresentados seriam deduzidos aqui e, desta forma, mostraremos que tais deduções convergem tanto com a teoria desenvolvida por Hilborn (2018), quanto pelo trabalho desenvolvido por Nascimento e Cuzinatto (2022).

Em especial, como mencionamos no capítulo 1, Nascimento e Cuzinatto (2022) extrapolam suas deduções e comparam seus resultados às dez primeiras detecções divulgadas pela Colaboração LIGO-Virgo, entre 11 de fevereiro de 2016 (data de anúncio da descoberta), até 20 de junho de 2020. Uma vez que estes autores já realizaram esse levantamento, iremos mostrar que podemos associar o seu trabalho à teoria desenvolvida por Hilborn (2018), de modo que os resultados obtidos a partir dessa analogia também convergem em ordem de grandeza aos dados da primeira detecção, o evento GW150914[12], publicado por Abbott *et al.*, (2016).

Neste sentido, é necessário apresentarmos os gráficos que correspondem a essa detecção, pois deles extraímos apenas uma informação importante para compreender algumas das características mais significativas das ondas gravitacionais A seguir, a figura da primeira detecção de ondas gravitacionais:

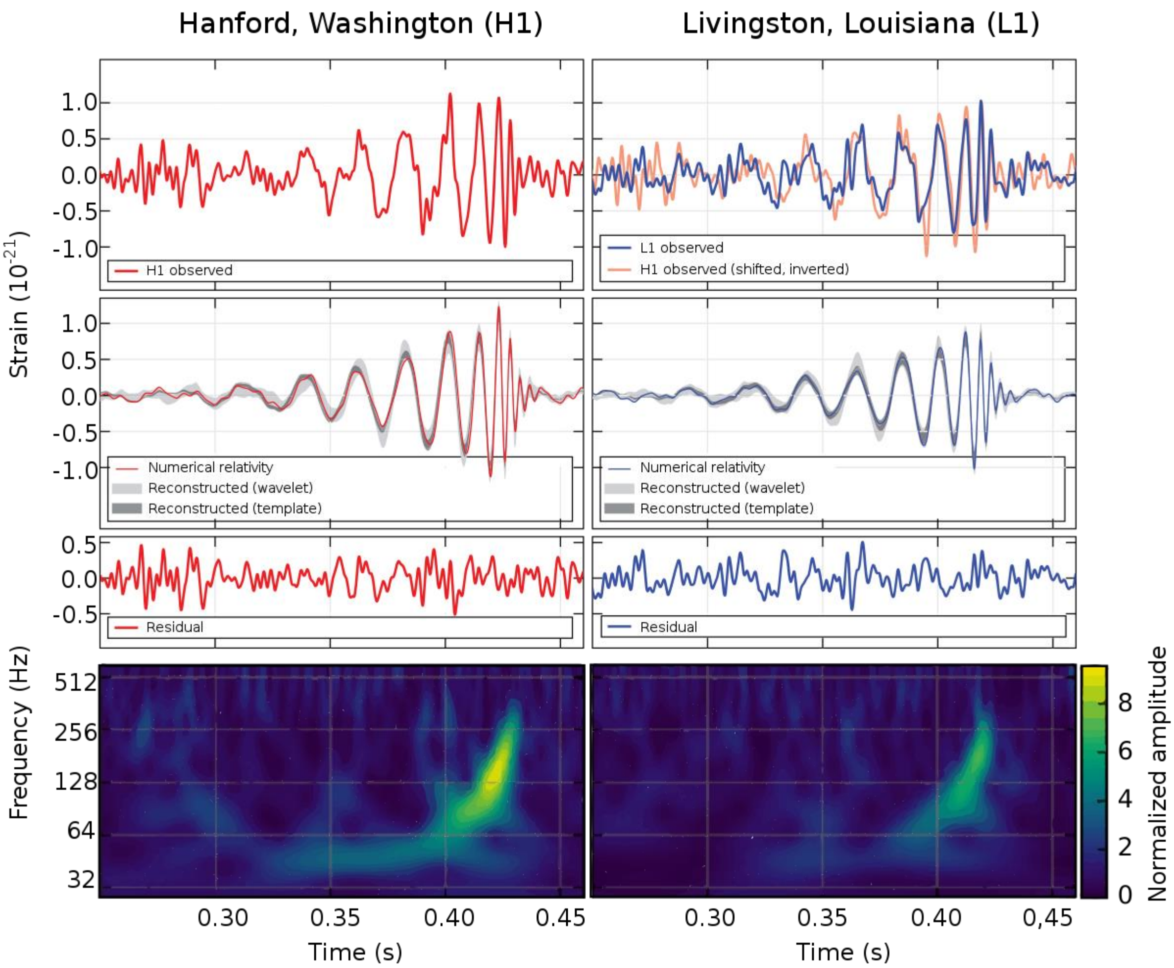


Figura 17 – A detecção ocorrera em dois instrumentos interferométricos: o da esquerda situado em Hanford, Washington (H1), e o da direita em Livingston, Lousiana (L1). Na primeira linha temos as detecções realizadas por cada um destes instrumentos, sendo que em L1 temos a sobreposição com o dado obtido por H1, onde fora necessário um pequeno desvio para compensar o tempo de detecção em cada instrumento e invertido devido as diferentes posições de instalação dos observatórios. Na segunda linha temos o *Strain*, demonstrando que, em ambos os observatórios, os resultados previstos pela relatividade geral numérica coincidiram com as detecções. Na terceira linha essa coincidência fica mais evidente, pois temos a diferença entre os dados obtidos (primeira linha) e os dados previstos (segunda linha), mostrando que em ambos os detectores ela oscila em zero. Na quarta linha temos os gráficos da frequência pelo tempo, mostrando que ela aumenta drasticamente.
Fonte: Abbott *et al.*, (2016) e Nascimento e Cuzinatto (2022).

[12] Como colocam Nascimento e Cuzinatto (2022): GW é referente a ondas gravitacionais, em inglês. Os números são referentes a data da detecção do evento no formato de data americano, isto é, para nós, 14 de setembro de 2015.

Na sequência, utilizamos uma parte das deduções realizadas por Nascimento e Cuzinatto (2022) integrando-as, quando necessário, às deduções que Hilborn (2018) realizara. Mostraremos que tais deduções possibilitam que utilizemos os dados da figura 17 para encontrar grandezas significativas para a compreensão de ondas gravitacionais.

4.2.1 MASSA DE *CHIRP*

Uma das características mais comentadas quando iniciamos os estudos sobre ondas gravitacionais é a massa de *chirp*. Como colocam Nascimento e Cuzinatto (2022, p.14), ela consiste "no aumento da frequência angular na coalescência de buracos negros [que] aparece como o aumento de frequência da onda gravitacional, indicado pelo arco luminoso nos painéis inferiores da figura [17]". Para deduzi-la, podemos tomar a derivada temporal da terceira lei de Kepler (43), de modo que teremos

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{GM}}{r^{5/2}}\dot{r}$$

Temos $\dot{r}$ pela equação (47), portanto

$$\dot{\omega} = 3\frac{\sqrt{GM}}{r^{5/3}}\left(\frac{N\eta(GM)^3}{c^5r^3}\right)$$

Ou então

$$\dot{\omega} = \frac{3N\eta(GM)^{7/2}}{c^5r^{11/2}}$$

Para facilitar as deduções, faremos a seguinte fatoração:

$$\dot{\omega} = \frac{3N\eta(GM)^{5/3}(GM)^{11/6}}{c^5r^{11/2}}$$

E então, adequamos a frequência angular da lei de Kepler de modo que temos

$$\omega^{11/3} = \frac{(GM)^{11/6}}{r^{11/2}}$$

Assim, teremos elevando a igualdade por 3/5

$$\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^{11/3}}\right)^{3/5} = \left(\frac{3N\eta(GM)^{5/3}}{c^5}\right)^{3/5}$$

$$\left(\dot{\omega}\omega^{-11/3}\right)^{3/5} = \frac{3^{3/5}(N\eta)^{3/5}GM}{c^3}$$

Encontramos, portanto

$$(N\eta)^{3/5}M = \frac{c^3}{3^{3/5}G}\left(\dot{\omega}\omega^{-11/3}\right)^{3/5} \quad (51)$$

Onde $\eta^{3/5}M$ representa a massa de *chirp*, que é a equação encontrada por Hilborn (2018, p.192). É interessante notar que essa expressão depende apenas da frequência orbital ω do sistema.

Com um pouco de manipulação algébrica, podemos ver que a equação (51) é a mesma equação encontrada por meio de física básica pelos autores Nascimento e Cuzinatto (2022, p.13):

$$\frac{(m_a m_b)^{3/5}}{(m_a + m_b)^{1/5}} = \frac{c^3}{G}\left(\frac{\omega^{-11/3}}{3N}\frac{d\omega}{dt}\right)^{3/5}$$

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G}\left(\frac{\omega^{-11/3}}{3N}\frac{d\omega}{dt}\right)^{3/5} \quad (52)$$

Onde $\mathcal{M} = \frac{(m_a m_b)^{3/5}}{(m_a+m_b)^{1/5}}$ é a massa de *chirp*. O único ponto de diferença é que estes autores utilizam α ao invés de N, mas ambos possuem o mesmo significado, sendo apenas um fator numérico.

Podemos deixar a expressão (52) em uma forma mais transparente em termos das detecções realizadas pela colaboração LIGO-VIRGO, especialmente a GW150914 exposta na figura 17. Iniciamos ressaltando o que colocam Nascimento e Cuzinatto (2022) sobre o período para um sistema binário. Neste caso, ao invés de termos a famigerada expressão $T = 2\pi/\omega$ para o período de uma partícula, temos

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Pois, em um sistema binário, as massas atingem as mesmas configurações iniciais após meia volta de cada uma das massas. Assim, podemos fazer

$$\frac{d\omega}{dt} = \pi\frac{df}{dt}$$

Substituindo na equação (52), encontramos

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G}\left(\frac{\pi^{-8/3}}{3N} f^{-11/3}\frac{df}{dt}\right)^{3/5} \tag{53}$$

Essa equação para a massa de *chirp* é idêntica a equação presente no trabalho da primeira detecção de ondas gravitacionais, para $N = 32/5$ (Abbott *et al.*, 2016). Com ela, vemos que a massa de *chirp* pode ser definida apenas pela frequência que podemos extrair diretamente dos dados de detecção. Para mostrar como podemos fazer isso, iniciamos tomando como condições iniciais:

$$\begin{cases} t = t_1 \rightarrow f = f_1 \\ t = t_2 \rightarrow f = f_2 \end{cases}$$

Integraremos a equação (53) desde t_1, que corresponde ao tempo inicial do movimento espiral até a coalescência, onde podemos extrair f_1 da quarta linha da figura 17, até o momento t_2, que corresponde a um tempo arbitrário de uma frequência f_2 (Nascimento e Cuzinatto, 2022).

Manipulando a equação (53), agrupando os termos de frequência e elevando a igualdade a 5/3:

$$f^{-11/3}\frac{df}{dt} = 3N\pi^{8/3}\left(\frac{G}{c^3}\mathcal{M}\right)^{5/3}$$

E então, integrando os lados com as respectivas condições iniciais,

$$\int_{f1}^{f2} f^{-11/3} df = 3N\pi^{8/3}\left(\frac{G}{c^3}\mathcal{M}\right)^{5/3}\int_{t1}^{t2} dt$$

temos

$$\frac{3}{8}\left(\frac{1}{{f_1}^{8/3}} - \frac{1}{{f_2}^{8/3}}\right) = 3N\pi^{8/3}\left(\frac{G}{c^3}\mathcal{M}\right)^{5/3}(t_2 - t_1)$$

Definindo $\tau \equiv t_2 - t_1$, encontramos

$$\frac{1}{{f_1}^{8/3}} - \frac{1}{{f_2}^{8/3}} = 8N\pi^{8/3}\frac{(G\mathcal{M})^{5/3}}{c^5}\tau$$

A massa de *chirp* $\mathcal{M}$ pode ser encontrada se elevarmos a igualdade à 3/5,

$$\left(\frac{1}{{f_1}^{8/3}} - \frac{1}{{f_2}^{8/3}}\right)^{3/5} = \left(8N\pi^{8/3}\frac{(G\mathcal{M})^{5/3}}{c^5}\tau\right)^{3/5}$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{G}\left[\frac{c^5}{8N\pi^{8/3}\tau}\left(\frac{1}{{f_1}^{8/3}} - \frac{1}{{f_2}^{8/3}}\right)\right]^{3/5}$$

Uma vez que f_1 é a frequência que corresponde ao início do mergulho em espiral das massas ao centro de massa do sistema, f_2 representa uma frequência após um tempo τ. Como $f_2 \gg f_1$, é razoável que consideremos $f_2 \to \infty$, portanto, a equação acima fica

$$\mathcal{M} = \frac{1}{G}\left[\frac{c^5}{8N\pi^{8/3}\tau {f_1}^{8/3}}\right]^{3/5} \tag{54}$$

Encontramos uma equação bastante simples que mostra a possibilidade de encontrarmos a massa de *chirp* de um sistema binário apenas determinando o tempo τ e a frequência f_1, que podem ser obtidos por meio da quarta linha dos gráficos da figura 17 (Nascimento e Cuzinatto, 2022). Na próxima subseção, veremos uma possibilidade para calcular a massa total da binária.

4.2.2 MASSA TOTAL DA BINÁRIA

Podemos encontrar a massa total do sistema binário manipulando a terceira lei de Kepler com o raio de Schwarzschild:

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3};\ r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Onde M é a massa total do sistema binário $M = m_a + m_b$. Relacionando as equações, temos

$$\omega^2 = \frac{c^6}{8(GM)^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c^6}{8(GM)^2}}$$

$$\omega = \frac{c^3}{\sqrt{8}GM}$$

Isolando a massa total do sistema M, encontramos

$$M = \frac{c^3}{\sqrt{8}G\omega}$$

Lembrando que, para o sistema binário, $\omega = \pi f$, portanto

$$M_{tot} = \frac{1}{\pi\sqrt{8}}\frac{c^3}{Gf_c} \tag{55}$$

Onde definimos $f = f_c$ que corresponde à frequência de *chirp*.

Novamente temos uma equação bastante simples em que podemos extrair a frequência de *chirp* diretamente dos dados da quarta linha da figura 17. Seu significado refere-se ao máximo valor identificado pelo arco luminoso deste gráfico, que ocorre entre 0,40 e 0,45 segundos da coalescência (Nascimento e Cuzinatto, 2022).

4.2.3 MASSAS INDIVIDUAIS

Iremos deduzir as massas individuais do sistema por meio da alternativa desenvolvida por Nascimento e Cuzinatto (2022). Relacionando as equações que encontramos para a massa de *chirp* (52) e a massa total do sistema, temos

$$\begin{cases} M_{tot} = m_a + m_b \\ \mathcal{M} = \dfrac{(m_a m_b)^{3/5}}{(m_a + m_b)^{1/5}} \end{cases} \tag{56}$$

Isolando m_b na primeira equação, teremos

$$m_b = M_{tot} - m_a$$

E a segunda equação fica

$$\mathcal{M} = \frac{[m_a(M_{tot} - m_a)]^{3/5}}{(M_{tot})^{1/5}}$$

Como não temos solução analítica dessa equação, buscaremos um método alternativo para encontrar as massas individuais. Começamos propondo que a massa m_b possui uma parcela ξ da massa total M_{tot} do sistema, de modo que teremos

$$m_b = \xi M_{tot} \tag{57}$$

ou seja, $m_b < M_{tot}$, pois $0 < \xi < 1$. Aplicando (57) na primeira equação do sistema (56), temos para m_a

$$M_{tot} = m_a + \xi M_{tot}$$
$$m_a = M_{tot}(1 - \xi) \tag{58}$$

Substituindo (57) e (58) na segunda equação do sistema de (56), encontramos

$$\mathcal{M} = \frac{(M_{tot}(1-\xi)\xi M_{tot})^{3/5}}{(M_{tot}(1-\xi)+\xi M_{tot})^{1/5}}$$

Podemos simplificar a equação acima elevando a igualdade a potência de 5/3:

$$\mathcal{M}^{5/3} = \frac{(M_{tot})^2\xi(1-\xi)}{(M_{tot})^{1/3}}$$

$$\mathcal{M}^{5/3} = (M_{tot})^{5/3}\xi(1-\xi)$$

De modo que teremos

$$\left(\frac{\mathcal{M}}{M_{tot}}\right)^{5/3} = \xi - \xi^2$$

Ou então

$$\xi^2 - \xi + \left(\frac{\mathcal{M}}{M_{tot}}\right)^{5/3} = 0$$

Que é uma equação do segundo grau em que podemos resolver por meio da fórmula de Bhaskara. Assim,

$$\xi = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{\mathcal{M}}{M_{tot}}\right)^{\frac{5}{3}}} \tag{59}$$

Temos interesse apenas no sinal negativo de sua solução. Para que o argumento da raiz seja positivo, e por isso, seja real, devemos ter

$$\left(\frac{\mathcal{M}}{M_{tot}}\right)^{5/3} < \frac{1}{4}$$

Ou então

$$\frac{\mathcal{M}}{M_{tot}} < \frac{1}{4^{3/5}}$$
$$\mathcal{M} < 0{,}44M_{tot} \qquad (60)$$

A equação (60) mostra que precisamos estimar corretamente os valores de $\tau, f_1\ e\ f_c$ por meio dos dados observacionais para respeitar este vínculo, caso contrário a estimativa não foi boa o suficiente. Mostraremos na próxima seção que os cálculos utilizando os dados da figura 17 nos permitem, por meio das equações (57), (58) e (59), obter as respectivas massas individuais do sistema.

4.2.4 MASSA IRRADIADA

Para encontrarmos a massa irradiada na forma de ondas gravitacionais, é razoável propormos que a distância máxima que os buracos negros podem alcançar na coalescência sem efetivamente iniciar o processo de colisão é dada pelo próprio raio de Schwarschild. Para melhor visualizar este momento da coalescência, temos a Figura 18.

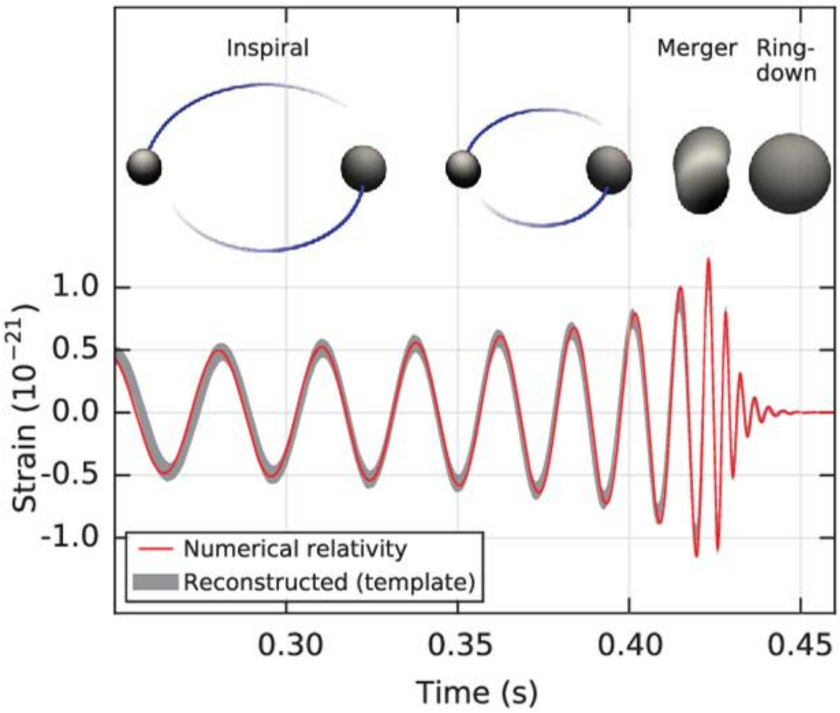


Figura 18 – Instantes da coalescência e sua relação com o *Strain* da detecção de GW150914 obtida por H1. Após o início da coalescência, as órbitas vão diminuindo até que ocorra o *merger* (ou fusão) dos buracos negros, e então, temos o *ring-down*: onde ocorrem os modos quasinormais gerados pelo buraco negro resultante da colisão.
Fonte: adaptado de Abbott *et al.*, (2016).

É admissível assumirmos que no momento de *Merger* a soma dos raios das massas corresponde ao raio de Schwarschild, isto é, a equação (47) fica da seguinte forma:

$$r_a + r_b = \frac{2GM}{c^2} \tag{61}$$

Aplicando (61) em (46), temos a energia irradiada do sistema em termos da massa reduzida:

$$E_{irr} = -\frac{1}{4}\frac{m_a m_b}{(m_a + m_b)}c^2 \tag{62}$$

Onde podemos ignorar o sinal negativo pois ele corresponde apenas à emissão de energia do sistema. Aplicando-a na famosa equação de Einstein que associa massa à energia $E = mc^2$, encontramos

$$E_{irr} = M_{irr}c^2$$
$$M_{irr} = \frac{1}{4}\frac{m_a m_b}{(m_a + m_b)} \tag{63}$$

Desta forma, a massa irradiada na forma de ondas gravitacionais é exatamente um quarto da massa reduzida do sistema. Nascimento e Cuzinatto (2022, p.18) mostram ainda que a energia irradiada em formas de ondas gravitacionais pela colisão de grandes massas, como dos buracos negros do evento GW150914, corresponde “a um trilhão de trilhão de vezes mais energia do máximo que a humanidade pode produzir em um experimento hoje”.

4.2.5 RAIO INICIAL DA COALESCÊNCIA

Podemos estimar o raio inicial da coalescência, isto é, a distância entre as massas no início do mergulho em espiral, substituindo a função (50) na terceira lei de Kepler (43), de modo que teremos

$$\omega^2 = \frac{GM}{({r_0}^4 - N\eta c {r_s}^3 \tau)^{3/4}}$$

Onde lembramos a definição de $\tau \equiv t_2 - t_1$. Uma vez que $\omega = \pi f$ e elevando a igualdade a 4/3, encontramos

$$r_0{}^4 = \frac{(GM)^{4/3}}{(\pi f)^{8/3}} + N\eta c r_s{}^3 \tau$$

Ou então,

$$r_0 = \left(\frac{(GM)^{4/3}}{(\pi f)^{8/3}} + \frac{8G^3 MN\tau}{c^4}\right)^{1/4} \qquad (64)$$

Utilizando os dados de massa total M que encontramos anteriormente, a frequência e o tempo do início ao final da coalescência obtidos pelos gráficos de detecção, encontramos a distância inicial dos buracos negros na binária.

Os resultados dos cálculos desenvolvidos nas subseções vistas até aqui, utilizando os dados da detecção GW150914 da figura 17, serão apresentados a seguir como componentes da sequência didática que estruturam nossa abordagem destas propostas.

4.3 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Reiteramos ao longo deste capítulo que a abordagem que propomos reúne a teoria de Hilborn (2018), o trabalho desenvolvido por Nascimento e Cuzinatto (2022) e os dados de detecção do evento GW150914 publicados por Abbott *et al.*, (2016). Como uma forma de sintetizar a proposta e elucidar sua potencialidade em sala de aula na licenciatura em física, apresentamos nesta subseção uma sequência didática, onde tecemos alguns comentários sobre a prática.

A presente sequência didática foi inspirada na metodologia de ensino *Peers Instruction*, que consiste em

> [...] um método de ensino baseado no estudo prévio dos materiais disponibilizados pelo professor e apresentação de questões conceituais, em sala de aula, para os alunos discutirem entre si. Sua meta principal é promover a aprendizagem de conceitos fundamentais dos conteúdos em estudo, através da interação entre os estudantes (Araujo e Mazur, 2013, p.367).

Essa interação pode favorecer o esclarecimento de dúvidas dos conceitos científicos do estudante, em razão da proximidade de seu colega a estas mesmas dúvidas. Neste cenário, o papel do professor é como mediador das discussões, ou mesmo um facilitador do aprendizado (sem diminuir sua atuação como personagem fundamental no processo). Desta forma, a introdução da temática de física moderna e contemporânea referente a ondas gravitacionais por meio dessa estratégia metodológica, pode ajudar duplamente no processo de formação do professor, tanto em relação à sua própria aprendizagem quanto em relação aos bons exemplos que ele possivelmente poderá levar para sua prática em sala de aula, pois ela incentiva o pensamento autônomo em uma perspectiva crítico-reflexiva.

A sequência didática consiste em uma pré-aula e quatro aulas de cinquenta minutos. A pré-aula corresponde ao momento anterior à aplicação da sequência didática em si. Portanto, trata-se na adequação da presente proposta ao conteúdo presente no plano de ensino do professor formador. Pensando nisso, elaboramos a sequência didática para ser aplicada na disciplina de Física IV, Física Moderna ou outra disciplina correspondente. Essa sugestão incorre da ausência da disciplina de astronomia nos cursos de licenciatura em física (Slovinscki *et al*., 2021), bem como, da ausência de conteúdos de ciência de fronteira nessas disciplinas (Gorges Neto e Arthury, 2023). Além disso, o ensino-aprendizagem da presente proposta necessita que os estudantes de licenciatura em física tenham estudado a disciplina de eletromagnetismo, pois diversos conceitos serão revisitados.

No momento de pré-aula, acreditamos que a sequência didática a seguir possa ser articulada após os estudantes da licenciatura em física já possuírem uma noção da descrição qualitativa e matemática da radiação eletromagnética, bem como, saberem que a taxa de transporte de energia por unidade de área é dada pelo vetor de Poynting.

A seguir, apresentamos as sugestões pensadas para as aulas da sequência didática. Como forma de facilitar o entendimento do decorrer em sala de aula, apresentamos as aulas dividindo seu tempo com as respectivas articulações que julgamos profícuas dentro dos cinquenta minutos estabelecidos.

No primeiro momento da aula 1 (*20 minutos*), o professor indaga seus alunos sobre a existência de outros tipos de radiação além da produzida por cargas aceleradas. Após uma breve discussão, o professor expõe que para compreendermos um outro tipo de radiação, é interessante que conheçamos com um pouco mais de profundidade os campos eletromagnéticos. O professor apresenta (*30 minutos*) a equação do campo eletromagnético de Liénard-Wiechert (19), demonstrando que ela possui dois componentes: um relacionado à velocidade e outro à aceleração. O professor então explica que, a longas distâncias, apenas a componente de aceleração é relevante, pois esta depende do inverso da distância até a fonte, enquanto o componente de velocidade constante depende do inverso do quadrado da distância. Neste ponto, o professor pode exibir a figura 4, que ilustra o comportamento das linhas de campo de uma partícula carregada em movimento. Ao final, o professor propõe que os alunos leiam, como tarefa para casa, a dedução da fórmula de Larmor (presente na seção 2.3), que será importante para a próxima aula.

O professor inicia a aula 2 (*5* minutos) questionando os alunos se tiveram alguma dúvida na dedução da fórmula de Larmor. Em seguida (*15* minutos), solicita que os alunos formem grupos e propõe a seguinte questão conceitual para discutirem entre si: “considere uma carga negativa girando em torno de uma carga positiva, o que irá acontecer com este sistema? A carga em órbita ficará estável, sairá pela tangente ou o sistema colapsará no centro de massa?”. Após deixar que os alunos discutam em seus grupos, o professor intervém e ouve as argumentações de cada grupo. Neste momento (*10 minutos*), o professor explica a fórmula de Larmor, mostrando que a aceleração da carga em órbita provoca a emissão de radiação pelo sistema, o que fará com que ele colapse. Em seguida (2*0 minutos*), apresenta a dedução da função da trajetória espiral da carga em órbita em direção ao centro atrator (presente na seção 2.4), bem como a figura 6 que demonstra essa trajetória. O professor então encerra a aula pedindo aos alunos que calculem o tempo de colapso desse sistema, como tarefa para casa.

Na aula 3 (*10 minutos*), o professor verifica se os estudantes conseguiram calcular o tempo de colapso do sistema proposto na aula passada. Em seguida, introduz os alunos a analogia entre radiação eletromagnética e gravitacional, mostrando que, assim como ocorre na eletrodinâmica clássica, massas em movimento acelerado também emitem radiação gravitacional. Para fazer isso (*10 minutos*), o professor pode utilizar a comparação entre a fórmula de Larmor e a equação (45) deduzida da teoria de Hilborn (2018) que lhe é correspondente para o caso gravitacional, reiterando a importância da massa reduzida nesse problema.

O professor apresenta (*30 minutos*) a dedução da função da trajetória espiral da binária coalescente e demonstra o gráfico correspondente e o da massa reduzida (presente na seção 4.1), salientando as semelhanças com o caso eletromagnético. O professor disponibiliza as deduções realizadas de algumas das características importantes das ondas gravitacionais (a partir da seção 4.2) que podemos tirar da função que encontramos e as apresenta rapidamente, apenas para que os alunos conheçam suas variáveis. Aliado a isso, o professor apresenta os gráficos da detecção do evento GW150914, destacando as frequências obtidas e seu intervalo de tempo na linha 4 da figura 17. Como tarefa para casa, o professor solicita aos alunos que resolvam e tragam seus valores para a próxima aula, considerando $N = 32/5$.

Neste momento, faremos uma pausa na descrição da sequência didática para demonstrar o que esperamos que os alunos obtenham dessas resoluções.

1. A massa de *chirp* é calculada por meio da equação (54) que depende apenas do tempo τ e frequência f_1 obtida na detecção. Das deduções que foram passadas para a leitura em casa, temos que $\tau = t_2 - t_1$, e então, na linha quatro da figura 17, temos representado a coalescência dos buracos negros pelo arco luminoso amarelo-esverdeado. O valor do eixo x desse gráfico para o início da coalescência corresponde a $t_1 \simeq 0{,}34\ s$. E para o eixo y, a frequência inicial é $f_1 \simeq 43\ Hz$. O pico do arco luminoso acontece em $t_2 \simeq 0{,}43\ s$, que corresponde a frequência máxima desse sistema atribuída à massa de chirp. Assim, temos que $\tau \simeq 0{,}09\ s$. Lembrando que $N = 32/5$, encontramos para a massa de *chirp* $\mathcal{M} \simeq 32M_{\odot}$[13] (Nascimento e Cuzinatto, 2022);
2. Podemos obter a massa total do sistema binário pela equação (55). Nessa equação, f_c corresponde a frequência de *chirp*, que é a frequência máxima obtida na coalescência dos buracos negros. Como comentado anteriormente, para este momento temos $t_2 \simeq 0{,}43\ s$, o que corresponde a $f_c \simeq 307\ Hz$. Substituindo estes valores na equação (55), obtemos uma massa total de $M_{tot} \simeq 74M_{\odot}$ (Nascimento e Cuzinatto, 2022);
3. Os valores das massas individuais desse sistema podem ser obtidos pela relação $0{,}44M_{tot} = 32{,}6M_{\odot}$ disponível nas deduções. Considerando $\mathcal{M} \simeq 32M_{\odot}$ e $M_{tot} \simeq 74M_{\odot}$ na equação (59), obtemos $\xi = 0{,}4$. Substituindo estes valores nas equações (57) e (58) obtemos, respectivamente, $m_b = 30M_{\odot}$ e $m_b = 44M_{\odot}$ (Nascimento e Cuzinatto, 2022). São valores muito grandes em termos de massa, e que podem ser refletidos na perspectiva da energia liberada neste processo.
4. Substituindo na equação (62) os valores das massas estimados, encontramos como energia total irradiada da binária coalescente $E_{irr} = 4\ x\ 10^{17}\ J$. Colocando em perspectiva, como apontam Nascimento e Cuzinatto (2022), estima-se que o Sol emitirá apenas 1% de sua massa total na forma de radiação durante todo o seu ciclo de vida. Em contrapartida, vemos com a equação (63), que o evento GW150914 emitiu aproximadamente $M_{irr} = 4M_{\odot}$.
5. Por fim, o raio inicial da órbita da binária pode ser obtido utilizando a equação (64), onde temos f como sendo a frequência de início da coalescência e $\tau = t_2 - t_1$, como vimos.

[13] $M_{\odot} = Massa\ solar = 1{,}989\ x\ 10^{30}\ kg.$

Empregando os demais resultados que obtivemos, considerando $N = 32/5$, temos como raio inicial entre as massas $r_0 = 813474{,}116\ m$ ou $r_0 \simeq 813\ km$. É interessante notar que Nascimento e Cuzinatto (2022) obtiveram $r_0 \simeq 815\ km$.

Consideramos que alguns desses aspectos podem ser aprofundados, a critério do professor, ainda na aula 3, quando são apresentadas suas deduções. Agora, retornamos à descrição da sequência didática.

No primeiro momento (*5 minutos*) da aula 4, o professor verifica se os alunos conseguiram desenvolver os cálculos e tira quaisquer dúvidas existentes das resoluções. Na sequência (*10 minutos*), apresenta a comparação da intensidade relativa da interação gravitacional e eletromagnética. Dada a Lei da Gravitação Universal:

$$F_g = \frac{Gm_p m_e}{r^2}$$

E a Lei de Coulumb:

$$F_e = \frac{k_e e^2}{r^2}$$

Teremos como razão

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{\frac{Gm_p m_e}{r^2}}{\frac{k_e e^2}{r^2}} = \frac{Gm_p m_e}{k_e e^2}$$

Substituindo os dados,

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{(6{,}674 \times 10^{-11})(1{,}673 \times 10^{-27})(9{,}109 \times 10^{-31})}{(8{,}988 \times 10^{9})(1{,}602 \times 10^{-19})^2}$$

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{1{,}018 \times 10^{-67}}{2{,}307 \times 10^{-28}} \approx 4{,}41 \times 10^{-40}$$

Com esse resultado, vemos que a interação gravitacional é, aproximadamente, quarenta ordens de grandeza menor que a elétrica. Uma vez que a dinâmica espiral de uma carga ao centro atrator produz radiação eletromagnética, a qual podemos detectar facilmente, no caso gravitacional foi um desafio muito mais complexo: precisamos de corpos coalescendo com muitas massas para produzir radiação gravitacional que seja significativa para detecção. Neste momento é importante que o professor enfatize a grande diferença entre as intensidades das interações gravitacionais e eletromagnéticas, lembrando dos resultados obtidos pelos alunos.

Na sequência (*10 minutos*), o professor compara os resultados calculados com os resultados tabelados no artigo de detecção do evento GW150914 (Abbott *et al.*, 2016). Reitera que utilizamos uma teoria e deduções que diferem da Relatividade Geral, mas que conseguimos obter resultados de mesma ordem de grandeza. Com o intuito de mostrar visualmente como ocorre essa discrepância, o professor pode apresentar o gráfico da figura 14, mostrando que a teoria desenvolvida por Hilborn (2018) utiliza as deduções da teoria eletromagnética de Maxwell para compreender a radiação gravitacional e, com isso, conseguimos obter uma boa aproximação da dinâmica da binária. Ao mesmo tempo que essa analogia nos possibilita compreender ondas gravitacionais, ela nos limita à sua natureza tensorial.

O professor apresenta (*25 minutos*) aos estudantes a importância histórica da descoberta de ondas gravitacionais. O professor pode articular o texto de Toniato (2021) "O que são ondas gravitacionais?" ao falar da primeira detecção indireta realizada por Hulse e Taylor, onde apontaram que a variação do período orbital do pulsar binário identificado como PSR 1913+16 é consequência da emissão de ondas gravitacionais. Ou então, como sugestão, o professor pode explorar a natureza dos detectores de ondas gravitacionais, que possuem como princípio de detecção aproveitar a deformação que a onda gravitacional causa no espaço-tempo quando passa (Aguiar, 2021).

Ao final, o professor pode expor que, assim como a radiação eletromagnética nos ensinou muito ao longo dos anos sobre o universo em que vivemos, a radiação gravitacional também tem o potencial de revelar novos conhecimentos, de modo que perguntas sobre a origem do universo, a origem dos elementos químicos mais pesados e estrelas que não emitem luz, podem ser compreendidas por este mensageiro.

4.4 ALGUMAS PERSPECTIVAS À LUZ DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Nesta seção, analisamos nossa proposta de sequência didática à luz da teoria de transposição didática apresentada no capítulo 1. Para isso, vamos considerar como categorias de análise as regras para a transposição didática (Astolfi e Develay, 1995), ou indícios de adaptabilidade desse saber ao sistema de ensino.

Lembramos que esses indícios correspondem à transposição do Saber Sábio, aquele que é desenvolvido pela comunidade científica, ao Saber Ensinado, que é realizado predominantemente pelo professor na educação básica. Como já adiantamos, este trabalho corresponde à transformação do Saber em seu primeiro patamar, o Saber a Ensinar, e, portanto, a análise feita nesta subseção nos dá uma perspectiva sobre as possibilidades da transposição didática de ondas gravitacionais por meio da analogia apresentada neste trabalho.

A primeira regra de transposição didática consiste em **(i) Modernizar o Saber Escolar**. Podemos argumentar que propostas de transposição didática de ondas gravitacionais refletem as tentativas de modernização do Saber Escolar quando compreendemos, essencialmente, a relevância científica para a compreensão das diferentes estratégias de perscrutação do universo.

É importante lembrar que após sua primeira detecção, realizada em 2015, as ondas gravitacionais não se constituem apenas como uma confirmação da Relatividade Geral de Einstein, mas, sobretudo, como um novo canal capaz de nos revelar características do universo que complementam os já conhecidos sinais eletromagnéticos. Como notório exemplo disso, tivemos em 2017 a detecção realizada pela colaboração LIGO/VIRGO da coalescência de estrelas de nêutrons, que ficou conhecido como GW170817 (Abbott *et al.,* 2017). Após cerca de dois segundos, o telescópio Fermi detectou um pico de raios gama, este evento ficou conhecido como GRB 170817A. Após incessantes buscas, fora descoberta a localização da fonte emissora, na galáxia NGC 9443, a cerca de 40 Mpc da Terra. É interessante destacar que as observações "eletromagnéticas associadas ao evento GW170817 mostraram que a fusão de estrelas de nêutrons pode ser o berço de grande parte dos elementos mais pesados que existem no universo" (Mendes, 2021, p.67).

Portanto, apesar de considerarmos distante a realidade do ensino de ondas gravitacionais semelhante ao ensino de ondas eletromagnéticas na educação básica, compreendemos que articulações iniciais por meio da estratégia comparativa entre estes fenômenos no patamar Saber a Ensinar, são um primeiro passo de adequação desse objeto de conhecimento ao Sistema de Ensino e de modernização do Saber Escolar.

A segunda regra corresponde a **(ii) Atualizar o Saber a Ensinar**. A proposição de novos objetos de conhecimento, por exemplo, em livros didáticos, deve se "limitar àqueles que não se encontram diluídos na cultura da sociedade" (Brockington e Pietrocola, 2005, p.397). Apesar de vermos notáveis esforços de divulgadores científicos expondo curiosidades sobre ondas gravitacionais para a população em geral, ainda é limitado o conhecimento que a sociedade detém sobre ondas gravitacionais.

Vale ressaltar que o número de trabalhos desenvolvidos com o intuito de elucidar pesquisadores não especialistas sobre o tema e a população em geral, foi conflagrado principalmente após a primeira detecção de ondas gravitacionais realizada em 2015, resultando em diversos artigos publicados em periódicos do ensino de física e de astronomia. Deste modo, a formalização desse objeto de conhecimento como objeto de ensino está apenas no começo, onde as estratégias de transposição didática estão sendo propostas por pesquisadores preocupados com seu ensino.

A terceira regra da transposição didática sugere que (**iii) Articular o Saber novo com o antigo** pode ser profícuo para o assentimento dos sujeitos do Sistema de Ensino à introdução de um novo objeto de conhecimento a ser ensinado.

> A introdução de novos saberes deve ser feita de forma articulada com outros saberes já alojados nos programas de ensino. Negar radicalmente um conteúdo já tradicionalmente presente no Sistema de Ensino pode gerar desconfiança por parte dos alunos para tudo aquilo que se deseja ser aprendido por ele na disciplina (Brockington e Pietrocola, 2005, p.398).

A articulação de ondas gravitacionais com ondas eletromagnéticas apresentada neste trabalho pode indicar uma maior adaptabilidade desse conhecimento no Sistema de Ensino. Por meio da teoria de Hilborn (2018), do trabalho realizado por Nascimento e Cuzinatto (2022) e da presente proposta de transposição didática, são possíveis alternativas de ensino que exploram as semelhanças e divergências entre esses domínios. Neste sentido, a compreensão da astronomia multimensageira pode adquirir maior relevância, visto que esses domínios se complementam em nossas investigações do cosmos.

Vale destacar que as estratégias de ensino de ondas gravitacionais, em sua grande maioria, ainda estão sendo discutidas no patamar do Saber a Ensinar e, certamente, precisam ser reestruturadas ao tempo de sala de aula na educação básica, ou seja, para o Saber Ensinado.

As iniciativas de **(iv) Transformar um Saber em exercícios e problemas** são facilitadas quando os próprios professores possuem familiaridade com o tema. No caso de ondas gravitacionais, como reiteramos no capítulo 1.1, elas só podem ser compreendidas fisicamente por meio do cálculo tensorial, basilar na Relatividade Geral. No entanto, a abordagem que as teorias utilizadas neste trabalho desenvolveram para aproximar o conceito físico desse objeto de conhecimento sem recorrer à sua teoria original, sugere a possibilidade da realização de uma ampla variedade de exercícios e atividades didáticas.

> A operacionalização do Saber em atividades para os estudantes é um dos critérios mais importantes para a sua presença na sala de aula. Operacionalidade, nos termos da Transposição Didática, deve ser entendida como uma maneira através da qual uma atividade pode gerar formas de se “lidar” com o sistema de ensino (o sistema didático, em especial). Não é uma característica vinculada apenas ao saber, visto ser fundamental para o gerenciamento do Contrato Didático, estabelecido entre professor-aluno-saber. A operacionalidade é um atributo importante, pois garante a gestão do cotidiano escolar (Brockington e Pietrocola, 2005, p.398).

Neste sentido, nossa proposta de sequência didática oferece um vislumbre das inúmeras possibilidades disponíveis ao explorarmos a analogia entre a radiação gravitacional e a radiação eletromagnética. Além disso, uma vez que o professor de física se depara com problemas e/ou atividades relacionadas a esse tema e possui habilidades para sua compreensão, as possibilidades de adequação do Saber ao tempo de sala de aula aumentam.

A última regra sugere que a transposição didática deve proporcionar a compreensão de saberes, ou seja, deve **(v) Tornar um conceito mais compreensível.** Como discutimos há pouco, a realização da analogia entre o eletromagnetismo e a gravitação nos possibilita compreender, basicamente, os principais conceitos físicos envolvidos em um evento de ondas gravitacionais, sem necessariamente recorrermos ao formalismo da Relatividade Geral.

Embora os professores de física possuam disciplinas de física básica em sua formação inicial, os cursos de licenciatura em física normalmente não oferecem disciplinas específicas que desenvolvam as aptidões necessárias para a compreensão das ondas gravitacionais em seu domínio original[14]. Desta forma, a estratégia de utilizar a teoria maxwelliana de forma análoga à gravitação, facilita a compreensão de ondas gravitacionais ao professor de física em sua formação inicial.

Para além dos termos de adaptabilidade, lembramos da citação realizada no capítulo 1:

> [Um] novo Saber Escolar deve ser avaliado em termos da motivação que ele gera e de seu sucesso entre os alunos. Porém, agora o sucesso deve também ser visto no sentido de entendimento, prazer e significação e não apenas em termos de adaptabilidade (Brockington e Pietrocola, 2005).

A astronomia possui a capacidade de despertar o interesse dos estudantes no aprendizado dos conteúdos de física (Langhi e Nardi, 2009). Utilizando esta asserção como estratégia metodológica, são necessárias novas investigações no patamar do Saber a Ensinar para compreendermos se as atividades práticas a corroboram, de modo que possamos identificar

---

[14] Naturalmente, isso é justificado em função da identidade profissional que cursos de formação de professores pretendem desenvolver (Guridi *et al.*, 2020), de modo que os saberes associados à compreensão da Relatividade Geral sejam omitidos nessa etapa formativa.

se o entendimento que os estudantes podem adquirir desta abordagem é adequado à sua identidade profissional.

Apesar de notarmos que a analogia discutida ao longo deste trabalho se adapta bem ao Saber Ensinar, isto é, à formação inicial de professores de física, são necessárias novas pesquisas na educação básica, com estratégias didáticas concentradas na relação entre estes domínios, para termos uma conclusão mais auspiciosa no que se refere ao seu assentimento no Sistema de Ensino, como um objeto a ser ensinado.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos neste trabalho uma analogia entre a radiação eletromagnética e a radiação gravitacional, com a possibilidade de articulação em sala de aula na formação inicial de professores de física. Mostramos que a dedução da função que descreve a trajetória espiral da binária coalescente, desenvolvida por Hilborn (2018), é semelhante à dedução da trajetória espiral traçada por uma partícula carregada em direção ao centro atrator. Dessa dinâmica, temos a emissão de ondas gravitacionais e eletromagnéticas, respectivamente.

Para isso, demonstramos as deduções necessárias para a compreensão das principais equações utilizadas no caso eletromagnético e no seu análogo gravitacional. Além disso, evidenciamos que apesar de terem sido desenvolvidos de forma independente, o trabalho de Hilborn (2018) e de Nascimento e Cuzinatto (2022) podem ser complementares por meio de nossa proposta de abordagem. Mostramos também que é possível extrair os dados diretamente dos gráficos do evento GW150914, obtendo resultados de mesma ordem de grandeza desta detecção.

Produzimos uma sequência didática aos professores formadores nos cursos de licenciatura em física, sugerindo que ela seja aplicada à disciplina de Física IV, pois muitos dos conhecimentos de eletromagnetismo serão revisitados. Além disso, a analisamos por meio das regras (Astolfi e Develay, 1995) da teoria de transposição didática (Chevallard, 1991), e inferimos que nossa abordagem atende aos termos de adaptabilidade dessa teoria, mas que são necessárias novas pesquisas na formação inicial dos professores de física que buscam investigar corroborações e indicar aprimoramentos da estratégia aqui desenvolvida.

Esperamos que, além de fornecer uma sequência didática sobre ondas gravitacionais que possa ser articulada na formação inicial dos professores de física, este trabalho provoque reflexões sobre a transposição deste, relativamente recente, objeto de conhecimento para o Sistema de Ensino. Nesta pesquisa, apontamos que a iniciativa de o articular com saberes do eletromagnetismo, pode permitir que professores de física compreendam suas principais características físicas e ponderem articulações futuras para a educação básica. Apesar de possuir elementos[15] a ser aprimorados, a utilização de uma teoria sólida como a proposta por Hilborn (2018) possibilita que outras abordagens sejam desenvolvidas, não apenas para a formação inicial, mas sobretudo para a educação básica.

[15] Como é o caso do momento de *ringdown*, da figura 17, que não pode ser deduzido analiticamente em uma teoria vetorial.

As ondas gravitacionais, enquanto um tema da física moderna e contemporânea, precisam fazer parte dos conhecimentos que são trabalhados na formação inicial de professores de física. Elas têm se mostrado como um meio relevante de obter informação do universo, além de possuir características em seu desenvolvimento que podem favorecer uma apropriação adequada da atividade científica (Garcia e Camillo, 2021).

Por quase toda a história, a luz foi o único meio de conhecermos nossa realidade. Após problematizações sobre sua natureza, a ressignificamos como sinais eletromagnéticos. De posse desse tema, conhecemos os elementos que constituem nosso universo, as características dos diferentes tipos de estrelas, sua primeira luz, evolução e os estágios finais extremamente dependentes de sua massa. Observamos, também, que as galáxias se afastam de nós numa velocidade proporcional à sua distância e que o universo possuiu um estágio muito pequeno, denso e quente, onde toda matéria, tempo e espaço estavam concentrados.

Mas isso começou a mudar em setembro de 2015, quando após quase cem anos de sua predição, a confirmação empírica direta de ondas gravitacionais aconteceu. Conseguimos assim, compreender a dinâmica de sistemas binários coalescentes, descobrimos as massas dos objetos compactos que os constituem e confirmamos que irradiam energia na forma de radiação gravitacional. Com o aprimoramento das técnicas de detecção, como por exemplo, o projeto LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), que pretende desenvolver um interferômetro espacial para ser lançado na década de 2030 com uma sensibilidade superior aos terrestres (Aguiar, 2021), poderemos detectar sistemas binários muito antes de sua coalescência, exoplanetas e até mesmo estudar resquícios do *Big Bang*.

Naturalmente, não estamos propondo a transposição didática apresentada neste trabalho como a única e definitiva possibilidade de adequação desse objeto de conhecimento no Sistema de Ensino. No entanto, sabendo que a comunidade científica abriu novas fronteiras ao explorar o cosmos através das ondas gravitacionais, por que não incorporar esse conhecimento no Ensino de Física?

REFERÊNCIAS

ABBOTT, B. P. *et al*. GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical Review Letters**, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.

ABBOTT, B. P. *et al*. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.

AGUIAR, O. D. Detectores de ondas gravitacionais. **Cadernos de Astronomia**, v. 2, n. 2, p. 42, 2021.

ALMOULOUD, S. A. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. **Educar em Revista**, n. número especial, p. 191-210, 2011.

ARAUJO, I. S.; MAZUR, E. Instrução pelos colegas e ensino sob medida: uma proposta para o engajamento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 30, n. 2, p. 362-384, 2013.

ARTHURY, L. H. M. **O ensino da natureza da ciência na escola por meio de um material didático sobre a gravitação**. 2016. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica.) - Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis.

ASTOLFI, J-P; DEVELAY, M. **A Didática das Ciências**. Campinas: Papirus, 1995.

BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. Detecção de ondas gravitacionais. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 33, n. 3, p. 879-895, 2016.

BEISER, A. **Concepts of modern physics**. New York: McGraw-Hill, 2003.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Base Nacional Comum Curricular. Ensino Médio. Brasília, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. Brasília, 1999.

BRILL, O. L.; GOODMAN, B. Causality in the Coulomb gauge. **Am. J. Phys**, v. 35, n. 9, p. 832-837, 1967.

BROCKINGTON, G.; PIETROCOLA, M. Serão as regras da transposição didática aplicáveis aos conceitos de Física Moderna? **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 10, n. 3, p. 387-404, 2005.

CARDOSO, P. M. S. **Uma introdução ao estudo de ondas gravitacionais**. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN Campus Santa Cruz.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado**. La Pensée Sauvage, v.3, 1991.

CHALMERS, A. F.; FIKER, R. **O que é ciência afinal?** São Paulo: Brasiliense, 1993.

PAGLIOCHI, J. dos S. *et al*. Investigação dos processos de transposição didática interna e externa do conteúdo “Misturas” para o ensino médio. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 1, n. 1, 2020.

FONTELE, F. F. M.; CARVALHO, J. C. N. Sequência didática para o ensino de ondas gravitacionais e interferência no ensino médio. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 9, p. e365997087-e365997087, 2020. Disponível em: <https://www.relea.ufscar.br/index.php/relea/article/view/584>. Acesso em: 16 nov. 2023.

GARCIA, J. O.; CAMILLO, J. Ondas gravitacionais em desenvolvimento: reflexões sobre ciência na educação em ciências. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 27, 2021.

GORGES NETO, L.; ARTHURY, L. H. M. A Astronomia como disciplina obrigatória nos currículos de licenciatura em Física da região Sul do Brasil. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, São Carlos (SP), n. 32, p. 27–42, 2022. DOI: 10.37156/RELEA/2021.32.027. Disponível em: <https://www.relea.ufscar.br/index.php/relea/article/view/584>. Acesso em: 16 nov. 2023.

GURIDI, V. M. *et al*. Images and scholar cultures: Views of internship students in a Science Teacher Education Program in Brazil. **Education Policy Analysis Archives**, [S. l.], v. 28, p. 106, 2020. DOI: 10.14507/epaa.28.4486. Disponível em: <https://epaa.asu.edu/index.php/epaa/article/view/4486>. Acesso em: 16 nov. 2023.

HERDEIRO, C. A. R. Ondas gravitacionais e (astro) física fundamental. **Revista de Ciência Elementar**, v. 8, n. 4, 2020.

HILBORN, R. C. Gravitational waves from orbiting binaries without general relativity. **American Journal of Physics**, v. 86, n. 3, p. 186-197, 2018.

HORVATH, Jorge Ernesto. **High-energy Astrophysics: A Primer**. Springer Nature, 2022.

JUSTINIANO, A. R. J.; REIS, H. R.; GERMINIANO, D. R. Disciplinas e professores de Astronomia nos cursos de licenciatura em Física das universidades brasileiras. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, n. 18, p. 89-101, 2014.

LANGHI, R.; NARDI, R. Ensino da astronomia no Brasil: educação formal, informal, não formal e divulgação científica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, p. 4402-4412, 2009.

LIMA, José Ademir Sales de; SANTOS, R. C. 100 Anos da Cosmologia Relativística (1917–2017). Parte I: Das Origens à Descoberta da Expansão Universal (1929). **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, 2017.

LIMA, José Ademir Sales; SANTOS, Rose Clivia. Do eclipse solar de 1919 ao espetáculo das lentes gravitacionais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 41, p. e20190199, 2019.

MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo**. v.1. Ponta Grossa: UEPG, 2000.

MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo**. v.2. Ponta Grossa: UEPG, 2002.

MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo**. v.3. Ponta Grossa: UEPG, 2006.

MENDES, R. Estrelas de nêutrons e seus múltiplos mensageiros. **Cadernos de Astronomia**, v. 2, n. 2, p. 58-58, 2021.

NASCIMENTO, N. L. N. S.; CUZINATTO, R. R. Ondas gravitacionais de buracos negros coalescentes: um estudo quantitativo a partir de física básica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 44, p. e20220004, 2022.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1-Mecânica**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2002.

PIETROCOLA, M. Inovação curricular em Física: transposição didática e a sobrevivência dos saberes. **Encontro de Pesquisa em Ensino de Física**. Curitiba, 2008.

RAICIK, A. C. Um resgate histórico-epistemológico do átomo de Bohr: uma gênese nem sempre contada e suas implicações ao ensino de ciências. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 45, p. e20230039, 2023.

RYBICKI, George B.; LIGHTMAN, Alan P. **Radiative processes in astrophysics**. John Wiley & Sons, 1985.

SCHUTZ, Bernard F. Gravitational waves on the back of an envelope. **American Journal of Physics**, v. 52, n. 5, p. 412-419, 1984.

SLOVINSCKI, L.; ALVES-BRITO, A.; MASSONI, N. T. A Astronomia em currículos da formação inicial de professores de Física: uma análise diagnóstica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, 2021.

SIQUEIRA, M.; PIETROCOLA, M. A Transposição Didática aplicada a teoria contemporânea: A Física de Partículas elementares no Ensino Médio. **X Encontro de Pesquisa em Ensino de Física**, Londrina, v. 13, p. 14, 2006.

TONIATO, J. D. O que são ondas gravitacionais? **Cadernos de Astronomia,** v. 2, n. 2, 2021.

APÊNDICES

Neste apêndice faremos a resolução da integral

$$\int_0^{\pi} [sen^2(2\theta) + 4sen^2(\theta)]sen\theta d\theta \int_0^{\pi} d\phi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2(2\theta) \sin\theta \; d\theta + 4 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta \; d\theta$$

Vamos iniciar resolvendo a primeira integral. Lembrando que

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\sin^2(2\theta) = 1 - \cos^2(2\theta)$$

Teremos, portanto

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos^2(2\theta)) \sin\theta \; d\theta$$

$$\text{Por partes: } uv' = u'v - \int v'u'$$

$$u = (1 - \cos^2(2\theta)) = \sin^2(2\theta) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{d}{d\theta}(\sin^2(2\theta))$$

$$v' = \sin\theta \quad \Rightarrow \quad v = \int \sin\theta$$

Faremos uso da regra da cadeia:

$$\frac{dF(x)}{dy} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dy}$$

Onde

$$F = x^2, \quad y = \sin(2y)$$

Assim,

$$dF(x) = \frac{dx^2}{dx} \cdot \frac{d(\sin(2y))}{dy} = 2x \cdot \frac{d(\sin(2y))}{dy} = 2\sin(2y) \cdot \frac{d(\sin(2y))}{dy}$$

Regra da Cadeia para ($\frac{d(\sin(2y))}{dy}$)

$$F = \sin(w)\,, \quad w = 2y$$

$$\frac{dF(w)}{dy} = \frac{d(\sin(w))}{dw} \cdot \frac{dw}{dy} = \cos(w) \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\sin(2y))}{dy} = (\cos(2y) \cdot 2)$$

$$\therefore 2\sin(2y)\,(\cos(2y)) \cdot 2 = 4\sin(2y)\,(\cos(2y))$$

Sabendo que $\sin(a)\cos(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$,

$$4\sin(2y)\,(\cos(2y)) = \frac{4}{2}\sin(4y) \Rightarrow \overbrace{2\sin(4\theta)}^{u'}$$

$$v = \int \sin\theta\ d\theta = -\cos\theta$$

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

$$= \overbrace{(1 + \cos^2(2\theta))}^{u}\overbrace{(-\cos\theta)}^{v} - \int_0^{\pi} \overbrace{(\sin(4\theta))}^{u'}\overbrace{(-\cos\theta)}^{v}\ d\theta$$

Resolvendo esta integral, temos

$$-2\int_0^{\pi} \cos\theta \sin(4\theta) d\theta$$

Sabendo da identidade

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\sin(b+a) + \sin(b-a)$$

Teremos

$$= \int_0^{\pi} \sin(4\theta+\theta) + \sin(4\theta-\theta)\ d\theta$$
$$= \int \sin(5\theta) + \sin(3\theta)\ d\theta$$

$$u = 5\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{5} = d\theta$$
$$u = 3\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{3} = d\theta$$

$$= \left[-\sin^2(2\theta)\cos(\theta) - \left(\frac{\cos(5\theta)}{5} + \frac{\cos(3\theta)}{3}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{8}{15} + \frac{8}{15} = \frac{16}{15}$$

Este é o resultado da primeira integral que começamos a resolver no início deste apêndice. Agora vamos para a segunda integral

$$4\int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta\ d\theta$$

Lembrando da identidade

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$4\int_0^{\pi} (1 - cos^2\theta)\sin\theta\ d\theta$$

Fazendo a substituição: $u = \cos\theta \quad du = -\sin\theta\ d\theta$

$$-4\int_{1}^{-1}(1-u^2)\,du$$

$$-4\int_{1}^{-1}du\;-\int_{1}^{-1}u^2\;du$$

$$-4\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_1^{-1}=-4\left[-2+\frac{2}{3}\right]=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

Juntando os resultados para a integral do início, teremos

$$\int_0^{\pi}[sen^2(2\theta)+4sen^2(\theta)]sen\theta d\theta\int_0^{\pi}d\phi$$

$$=\left(\frac{16}{15}+\frac{16}{3}\right)2\pi=\frac{64\pi}{5}$$

ANEXOS

ANEXO A

O conteúdo deste anexo pode ser encontrado em (Machado, 2006, p. 49), onde podemos demonstrar que é sempre possível fazer com que um potencial vetor $\vec{A}$ satisfaça a condição de Lorenz

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Iniciamos supondo que $\vec{A}$ não satisfaz o calibre de Lorenz, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{A} \neq -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Podemos realizar uma transformação de calibre mediante as equações

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

para transformar $\vec{A}$ em $\vec{A}'$, cuja divergência é

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda$$

O novo potencial vetor deve satisfazer a condição de Lorenz, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

Portanto, transformando também o potencial escalar ϕ, temos

$$\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2\Lambda + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2\Lambda + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

ou ainda,

$$\nabla^2\Lambda - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \vec{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Supondo que esta equação possa ser resolvida, a função Λ seria conhecida e os novos potenciais $\vec{A}'$ e ϕ' seriam determinados, e, portanto, satisfariam a condição de Lorenz, como queríamos inicialmente.

ANEXO B

O conteúdo deste anexo pode ser encontrado em (Machado, 2006, p. 68). Iniciamos as resoluções com a equação de onda do potencial escalar

$$\nabla^2\phi - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Precisamos tomar cuidado, pois ϕ, dado por

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

depende de $\vec{r}$ tanto de forma explícita, no termo $|\vec{r} - \vec{r}'|$, como implicitamente, no tempo retardado $t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, e isso precisa ser levado em conta na hora de calcular seu Laplaciano. Vamos iniciar considerando o gradiente de ϕ, ou seja,

$$\nabla\phi = \nabla\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV\right]$$

Ou

$$\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla\left(\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dV$$

Para resolver a expressão acima, podemos fazer uso da identidade

$$\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$$

De modo que

$$\nabla\left(\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla\rho(\vec{r}', t_r) + \rho(\vec{r}', t_r)\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

Para continuarmos, precisamos de uma expressão que podemos encontrar na verificação de que a força eletromagnética é conservativa, de modo que

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Para realizar isso, iniciamos calculando o gradiente do potencial elétrico, assim,

$$\nabla U = \nabla\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla\left(\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dV$$

$$\nabla U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]dV$$

Precisamos calcular o gradiente dos colchetes acima. Vamos chamar

$$\vec{r} - \vec{r}' = X\hat{\imath} + Y\hat{\jmath} + Z\hat{k}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

e assim,

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right] = \left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial X} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial Y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial Z}\right]\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

ou

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right] = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right)$$

Calculando cada um dos termos separadamente, temos para o primeiro termo:

$$\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) = \hat{\imath}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}}2X$$

$$\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) = -\frac{X\hat{\imath}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}}$$

Para o segundo termo:

$$\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) = \hat{\jmath}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}}2Y$$

$$\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) = -\frac{Y\hat{\jmath}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}}$$

Para o terceiro termo:

$$\hat{k}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) = \hat{k}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}}2Z$$

$$\hat{k}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right) = -\frac{Z\hat{k}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}}$$

Portanto,

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = -\frac{X\hat{\imath}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}} - \frac{Y\hat{\jmath}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}} - \frac{Z\hat{k}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}}$$

ou

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = -\frac{X\hat{\imath}+Y\hat{\jmath}+Z\hat{k}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}}$$

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

E voltando à energia potencial, obtemos

$$\nabla U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]dV$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV$$

Ou seja,

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Voltando a nossa dedução, desta verificação utilizaremos a expressão

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Em

$$\nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla\rho(\vec{r}',t_r)+\rho(\vec{r}',t_r)\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]$$

Além disso, para calcular $\nabla\rho(\vec{r}',t_r)$ precisamos de uma regra da cadeia. Em coordenadas retangulares, temos

$$\nabla\rho(\vec{r}',t_r)=\left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\rho(\vec{r}',t_r)$$

ou

$$\nabla\rho(\vec{r}',t_r)=\hat{\imath}\frac{\partial\rho(\vec{r}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial\rho(\vec{r}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\rho(\vec{r}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}$$

Como

$$t_r=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$$

E $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ são independentes de t, temos

$$\frac{\partial}{\partial t_r}=\frac{\partial \mathrm{t}}{\partial t_r}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}$$

De modo que podemos escrever

$$\nabla\rho(\vec{r}',t_r)=\frac{\partial\rho(\vec{r}',t_r)}{\partial t}\left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]t_r$$

ou

$$\nabla\rho(\vec{r}',t_r)=\dot{\rho}(\vec{r}',t_r)\nabla t_r$$

Onde $\dot{\rho}$ representa a derivada temporal de ρ. Desta forma, comparando as expressões encontramos uma propriedade importante, isto é,

$$\left[\frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'}\right]_{t_r} = \frac{\partial}{\partial t}[\rho(\vec{r}', t')]_{t_r}$$

Onde o termo entre colchetes é calculado e depois aplicado no tempo retardado t_r. Essa relação vale em geral, de modo que, para qualquer função $f(\vec{r}', t')$ temos

$$\left[\frac{\partial f(\vec{r}', t')}{\partial t'}\right]_{t_r} = \frac{\partial}{\partial t}[f(\vec{r}', t')]_{t_r}$$

Como

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

Encontramos

$$\nabla t_r = \nabla\left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right]$$

Ou

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

Precisamos agora de

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$
$$\vec{r}' = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k}$$
$$\vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\hat{\imath} + (y - y')\hat{\jmath} + (z - z')\hat{k}$$
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

De modo que

$$\nabla(|\vec{r}-\vec{r}'|) = \left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

Ou

$$\nabla(|\vec{r}-\vec{r}'|) = \frac{(x-x')\hat{\imath}+(y-y')\hat{\jmath}+(z-z')\hat{k}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

E então

$$\nabla(|\vec{r}-\vec{r}'|) = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Com o uso da expressão acima, achamos

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

E

$$\nabla\rho(\vec{r}',t_r) = -\frac{\dot{\rho}(\vec{r}',t_r)}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

E então, retornando à equação

$$\nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla\rho(\vec{r}',t_r) + \rho(\vec{r}',t_r)\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]$$

Encontramos

$$\nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = -\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \rho\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

E, desse modo,

$$\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \rho\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] dV$$

Vamos tomar agora a divergência da expressão acima, para obter o Laplaciano, ou seja,

$$\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla\cdot\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \rho\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] dV\right\}$$

Ou

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla\cdot\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \rho\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] dV$$

Pela identidade

$$\nabla\cdot\left(\Phi\vec{A}\right) = (\nabla\Phi)\cdot\vec{A} + \Phi\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

Temos

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left\{-\frac{1}{c}\nabla\dot{\rho}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\rho}}{c}\nabla\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\right] - \nabla\rho\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \rho\nabla\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]\right\} dV$$

Para o primeiro e terceiros fatores dentro da integral, utilizamos

$$\nabla\rho(\vec{r}', t_r) = \dot{\rho}(\vec{r}', t_r)\nabla t_r$$

E

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

De forma que

$$\nabla\dot{\rho} = \ddot{\rho}\nabla t_r = -\frac{\ddot{\rho}}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

E

$$\nabla\rho = -\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Para continuarmos daqui, precisaremos de uma expressão que pode ser encontrada na dedução matemática da Lei de Gauss. Sabendo que o campo elétrico de uma distribuição de cargas é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV$$

Vamos calcular $\nabla\cdot\vec{E}$, ou seja,

$$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV\right\}$$

O operador ∇ não age sobre $\rho(\vec{r}')$, e assim, obtemos

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\nabla\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]dV$$

Para simplificar os cálculos, fazemos $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}' = X\hat{\imath}+Y\hat{\jmath}+Z\hat{k}$, de forma que temos que calcular

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = \frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R}+\vec{R}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R^3}\right]$$

O primeiro termo fica

$$\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R} = \frac{1}{R^3}\left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial X} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial Y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial Z}\right]\cdot\left[X\hat{\imath} + Y\hat{\jmath} + Z\hat{k}\right]$$
$$= \frac{1}{R^3}\left[\frac{\partial X}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Z}\right]$$

$$\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R} = \frac{3}{R^3}$$

O segundo é

$$\vec{R}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R^3}\right] = \vec{R}\cdot\left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial X} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial Y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial Z}\right]\left[\frac{1}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}}\right]$$
$$= \vec{R}\cdot\left[\frac{-3X\hat{\imath} - 3Y\hat{\jmath} - 3Z\hat{k}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{5/2}}\right]]$$
$$= -3\vec{R}\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^5}\right]$$
$$= -\frac{3R^2}{R^5}$$
$$\vec{R}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R^3}\right] = -\frac{3}{R^3}$$

e assim, obtemos

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = \frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R} + \vec{R}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R^3}\right] = \frac{3}{R^3} - \frac{3}{R^3}$$

que é nulo se $\vec{R} \neq 0. Quando\ \vec{R} = 0$, ou seja, quando $\vec{r} = \vec{r}'$, temos uma indeterminação. Fisicamente isso significa que estamos na mesma posição que a das cargas geradoras. Para resolvê-la, vamos considerar uma pequena esfera de raio R em torno do ponto $\vec{r} = \vec{r}', ou\ \vec{R} = 0$, e usar o teorema do divergente neste ponto, isto é, calculamos

$$\int_V \nabla\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right]dV = \oint_S \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\cdot\hat{n}dA$$

Para uma esfera, a normal é o próprio vetor $\frac{\vec{R}}{R}$ e assim,

$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] dV = \oint_S \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R}\right] dA]$$

$$= \oint_S \frac{R^2}{R^4} dA$$

$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] dV = \frac{1}{R^2} \oint_S dA$$

$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] dV = \frac{1}{R^2} (4\pi R^2)$$

$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] dV = 4\pi$$

pois a área da esfera é $A = 4\pi R^2$. Esta equação não depende de R , e, portanto, ela vale inclusive para $R = 0$, que é o ponto que nos interessa. Como a integral é não-nula, e lembrando que o divergente é nulo para todo $\vec{R} \neq 0$, vemos que, se $\vec{R} = 0$, o divergente deve ser não-nulo, pois senão a integral seria identicamente nula, o que discorda do fato de que, na verdade, ela vale 4π. Ou seja, a única contribuição para o divergente vem dos pontos onde $\vec{R} = 0, ou\ \vec{r} = \vec{r}'$, que são os pontos onde se situam as cargas e onde se espera que algo diferente ocorra. Para representar esta situação, é comum usar as chamadas funções delta de Dirac $\delta(x)$, que têm várias propriedades interessantes. No nosso caso, as relevantes são

$$\int \delta(x - x_0) dx = 1$$

e

$$\int f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

que valem desde que o intervalo de integração contenha o valor x_0 da delta de Dirac. Portanto, podemos escrever

$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] dV = \int_V 4\,\pi\delta\big(\vec{R}\big) dV$$

pois teríamos

$$\int_V 4\,\pi\delta\big(\vec{R}\big) dV = 4\pi \int_V \delta\big(\vec{R}\big) dV = 4\pi \times 1 = 4\pi$$

Além disso, reescrevendo a penúltima equação como

$$\int_V \left\{\nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] - 4\pi\delta\big(\vec{R}\big)\right\} dV = 0$$

chegamos a uma importante propriedade matemática, que é

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = 4\pi\delta\big(\vec{R}\big)$$

ou

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

pois o volume de integração é arbitrário. De posse desta equação, voltamos ao divergente do campo para achar

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}')\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right] dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}')4\,\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') dV\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}')dV$$

e, portanto,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

que é a primeira lei de Maxwell da Eletrostática.

A expressão que precisamos para continuar nossa solução das equações de onda é

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

De modo que pode ser substituído no último termo da expressão

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left\{-\frac{1}{c}\nabla\dot{\rho}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\rho}}{c}\nabla\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\right] - \nabla\rho\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \rho\nabla\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]\right\}dV$$

Agora só precisamos calcular o segundo termo dessa expressão,

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\right] = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\nabla\cdot(\vec{r}-\vec{r}') + (\vec{r}-\vec{r}')\cdot\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\right]$$

Considerando que

$$\nabla\cdot(\vec{r}-\vec{r}') = 3$$

E, além disso,

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\right] = \left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left(\frac{1}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\right] = -\frac{2(x-x')\hat{\imath} + (y-y')\hat{\jmath} + (z-z')\hat{k}}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^2}$$

Ou

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\right] = -2\,\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4}$$

Portanto, encontramos

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\right] = \frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \left[-2\,\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4}\right]$$
$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\right] = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Reunindo as expressões que encontramos, obtemos

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left\{-\frac{1}{c}\left[-\frac{\ddot{\rho}}{c}\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right] \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\rho}}{c}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \left[-\frac{\ddot{\rho}}{c}\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right] \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \rho 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\right\} dV$$

Ou ainda, fazendo as devidas simplificações

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left\{\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - 4\pi\rho(\vec{r}', t_r)\delta(\vec{r} - \vec{r}')\right\} dV$$

Podemos escrever a expressão acima como

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right] dV - \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}', t_r)\delta(\vec{r} - \vec{r}') dV$$

Ou

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV\right] - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t)$$

A função delta faz com que $\vec{r}' = \vec{r}$, de modo que $|\vec{r} - \vec{r}'| = 0$ e $t_r = \mathrm{t}$. Aplicando a expressão

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV$$

Temos

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$

ou

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$

que é justamente a equação de onda que procurávamos, comprovando que o potencial escalar é solução da equação diferencial. Vamos iniciar agora a demonstração referente ao potencial vetor $\vec{A}$ dado por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV$$

Que deve ser solução da equação diferencial

$$\nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$$

Aqui não podemos utilizar o mesmo raciocínio feito no caso anterior, pois teríamos que calcular o gradiente de um vetor, e esta é uma operação que não está definida. Desta forma, é mais interessante fazer uso do seguinte argumento, que também é válido para o potencial escalar ϕ. Vamos considerar que o volume V pode ser dividido em duas regiões, V_1 e V_2, de modo que

$$V = V_1 + V_2$$

sendo que V_1 é uma pequena região em torno do ponto definido pelo vetor $\vec{r}$, que define o ponto em que o potencial vetor $\vec{A}$ será avaliado (o ponto de observação). O potencial $\vec{A}$ pode então ser escrito como

$$\vec{A} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2}$$

E para cada um desses potenciais vale a relação

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV_i$$

Ou, como

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

E

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{R}{c}$$

Podemos escrever

$$\overrightarrow{A_i}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV_i$$

Podemos fazer o volume V_1 ser tão pequeno quanto se queira. Quando fazemos isso (formalmente teremos $V_1 \to 0$), os efeitos de retardo gerados pela região dentro de V_1 tornam-se desprezíveis, de modo que podemos considerar que, dentro de V_1, a densidade de corrente fica

$$\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) \to \vec{J}(\vec{r}', t)$$

Portanto, o potencial vetor gerado pela região V_1 pode ser escrito como

$$\overrightarrow{A_1}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t)}{R}dV_1$$

vemos que o potencial gerado pela região V_1 é idêntico ao do caso estático. Para o caso estático, temos a equação de Poisson

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

de modo que, para o potencial $\overrightarrow{A_1}$, teremos a equação de Poisson

$$\nabla^2\overrightarrow{A_1} = -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t)$$

Esta é a primeira equação de que precisamos. A segunda vem do potencial vetor magnético $\overrightarrow{A_2}$, que é dado por

$$\overrightarrow{A_2}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_2}\frac{\vec{J}\left(\vec{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}dV_2$$

Precisamos calcular $\nabla^2\,\overrightarrow{A_2}$. Podemos utilizar o operado Laplaciano em coordenadas esféricas, considerando também que há uma simetria esférica em torno do ponto $\vec{r}$, já que o tempo retardado depende de $R = |\vec{r}-\vec{r}'|$, ou seja, do módulo da diferença entre os dois vetores. Assim, na verdade precisamos apenas da parte radial do Laplaciano, o qual é dado pela expressão,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Isto é,

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r)$$

Como $\vec{r}\ e\ \vec{r}'$ são independentes,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial R}$$

De modo que precisamos calcular

$$\nabla_R^2 \overrightarrow{A_2}(\vec{r}, t) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[R\,\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_2} \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}\, dV_2\right]$$

ou

$$\nabla_R^2 \overrightarrow{A_2}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_2} \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)\right] dV_2$$

Vamos iniciar calculando

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)\right] = \frac{\partial \vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial R}\left[t - \frac{R}{c}\right]$$

Ou

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)\right] = -\frac{1}{c}\dot{\vec{J}}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)$$

Agora, tomamos a próxima derivada com relação a R, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial}{\partial R}\left[\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial R}\left[-\frac{1}{c}\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)\right]$$

Ou

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[\vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial R}\left[t-\frac{R}{c}\right]$$

Ou então,

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[\vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)\right] = \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{J}}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)$$

Que pode ser reescrito como

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[\vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{\partial t^2}$$

Voltando ao potencial $\overrightarrow{A_2}$, temos

$$\nabla_R^2 \overrightarrow{A_2}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_2}\frac{1}{R}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{\partial t^2}d\mathrm{V}_2$$

Ou

$$\nabla_R^2 \overrightarrow{A_2}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_2}\frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{R}d\mathrm{V}_2\right]$$

Podemos perceber que, quando $\mathrm{V}_1 \rightarrow 0$, $\mathrm{V}_2 \rightarrow \mathrm{V}$, o que faz com que nesse limite a integral acima tenda ao potencial $\vec{A}$. Portanto, no limite, ficamos com

$$\nabla_R^2 \overrightarrow{A_2}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V}\frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{R}dV\right]}^{\vec{A}(\vec{r},t)}$$

E então

$$\nabla^2\overrightarrow{A_2}(\vec{r},t) = \nabla^2\overrightarrow{A_2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

Somando à expressão acima, a equação

$$\nabla^2\overrightarrow{A_1} = -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t)$$

Encontramos

$$\nabla^2\overrightarrow{A_1} + \nabla^2\overrightarrow{A_2} = -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Ou

$$\nabla^2\left(\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t)$$

Ou finalmente,

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t)$$

que é a equação de onda respectiva do potencial vetor.

Demonstramos, portanto, que as equações

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV$$

e

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV$$

são de fato as soluções das equações diferenciais respectivas.

ANEXO C

A dedução realizada neste anexo pode ser encontrada em (Silva, 2016, p. 99).

Encontraremos os campos de Liénard-Wiechert por meio das relações entre os campos e os potenciais abaixo

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

com os seguintes potenciais retardados

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R - \vec{R} \cdot \beta}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R - \vec{R} \cdot \beta} \vec{v}(t_r)$$

Calculando inicialmente o gradiente do potencial escalar, isto é, $\nabla\phi$,

$$\nabla\phi = \nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R - \vec{R} \cdot \beta} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{R - \vec{R} \cdot \beta} \right)$$

O operador ∇ atua sobre r e $r_q(t_r)$, pois

$$t_r = t - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r_q}(t_r) \right|}{c} = t - \frac{R}{c}$$

Temos então,

$$\nabla\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} - \frac{1}{\left(R - \vec{R} \cdot \beta\right)^2} \nabla\left(R - \vec{R} \cdot \beta\right)$$

$$\nabla\phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(R - \vec{R}\cdot\beta\right)^2}\left(\nabla R - \nabla\vec{R}\cdot\beta\right)$$

Já sabemos que

$$R = |\vec{r} - \overrightarrow{r_q}(t_r)| = c(t - t_r)$$

Portanto

$$\nabla R = c\nabla(t - t_r)$$
$$\nabla R = -c\nabla t_r$$

Por outro lado, temos também

$$\nabla R = \nabla\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}}}\nabla\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right)$$

Dada a identidade

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} + \vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right) + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A} + \vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)$$

de modo que

$$\nabla\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right) = \left(\vec{R}\cdot\nabla\right)\vec{R} + \vec{R}\times\left(\nabla\times\vec{R}\right) + \left(\vec{R}\cdot\nabla\right)\vec{R} + \vec{R}\times\left(\nabla\times\vec{R}\right)$$
$$\nabla\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right) = 2\left(\vec{R}\cdot\nabla\right)\vec{R} + 2\vec{R}\times\left(\nabla\times\vec{R}\right)$$

Primeiro, determinamos

$$\left(\vec{R}\cdot\nabla\right)\vec{R} = \left(\vec{R}\cdot\nabla\right)[\vec{r} - \vec{r}(t_r)]$$
$$= \left(\vec{R}\cdot\nabla\right)\vec{r} - \left(\vec{R}\cdot\nabla\right)\vec{r}(t_r)$$

Definindo

$$\vec{R} = R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k}$$
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$
$$\vec{r}(t_r) = x_t(t_r)\hat{\imath} + y_t(t_r)\hat{\jmath} + z_t(t_r)\hat{k}$$

temos que o primeiro termo

$$\begin{aligned}(\vec{R}\cdot\nabla)\vec{r} &= \left(\left(R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)\\ &= \left(R_x\frac{\partial}{\partial x} + R_y\frac{\partial}{\partial y} + R_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)\\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k}\\ &= \vec{R}\end{aligned}$$

Portanto

$$(\vec{R}\cdot\nabla)\vec{r} = \vec{R}$$

O segundo termo

$$\begin{aligned}(\vec{R}\cdot\nabla)\vec{r}(t_r) &= \left(\left(R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)\vec{r}(t_r)\\ &= \left(R_x\frac{\partial}{\partial x} + R_y\frac{\partial}{\partial y} + R_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{r}(t_r)\\ &= R_x\frac{d\vec{r}(t_r)}{dt_r}\frac{\partial(t_r)}{\partial x}\hat{\imath} + R_y\frac{d\vec{r}(t_r)}{dt_r}\frac{\partial(t_r)}{\partial y}\hat{\jmath} + R_z\frac{d\vec{r}(t_r)}{dt_r}\frac{\partial(t_r)}{\partial z}\hat{k}\\ &= R_x\vec{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial x}\hat{\imath} + R_y\vec{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y}\hat{\jmath} + R_z\vec{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial z}\hat{k}\end{aligned}$$

Portanto

$$(\vec{R}\cdot\nabla)\vec{r}(t_r) = \vec{v}(\vec{R}\cdot\nabla t_r)$$

Reunindo as equações, encontramos

$$\left(\vec{R}\cdot\nabla\right)\vec{R} = \vec{R} - \vec{v}\left(\vec{R}\cdot\nabla t_r\right)$$

Calculando agora

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{R} &= \nabla\times\left(\vec{r}-\vec{r}(t_r)\right)\\ &= \nabla\times\vec{r} - \nabla\times\vec{r}(t_r)\\ &= -\nabla\times\vec{r}(t_r)\end{aligned}$$

Entretanto

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{r}(t_r) &= \left(\frac{\partial z_q(t_r)}{\partial y} - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial z} - \frac{\partial z_q(t_r)}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial y_q(t_r)}{\partial x} - \frac{\partial x_q(t_r)}{\partial y}\right)\hat{k}\\ &= \left(\frac{dz_q(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dy_q(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{dx_q(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dz_q(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial x}\right)\hat{\jmath}\\ &\quad + \left(\frac{dy_q(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dx_q(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial y}\right)\hat{k}\\ &= \left(v_z\frac{\partial t_r}{\partial y} - v_y\frac{\partial t_r}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(v_x\frac{\partial t_r}{\partial z} - v_z\frac{\partial t_r}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(v_y\frac{\partial t_r}{\partial x} - v_x\frac{\partial t_r}{\partial y}\right)\hat{k}\\ \nabla\times\vec{r}(t_r) &= -\vec{v}\times\nabla t_r\end{aligned}$$

Voltando para a equação

$$\nabla\times\vec{R} = -\nabla\times\vec{r}(t_r)$$

Temos

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{R} &= \nabla\times\left(\vec{r}-\vec{r}(t_r)\right)\\ &= -\nabla\times\vec{r}(t_r)\\ \nabla\times\vec{R} &= \vec{v}\times\nabla t_r\end{aligned}$$

Reunindo as equações, encontramos

$$\nabla\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right) = 2\left(\vec{R}\cdot\nabla\right)\vec{R} + 2\vec{R}\times\left(\nabla\times\vec{R}\right)$$

$$\nabla\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right) = 2\left(\vec{R} - \vec{v}\left(\vec{R}\cdot\nabla t_r\right)\right) + 2\vec{R}\times(\vec{v}\times\nabla t_r)$$

e, retornando à equação

$$\nabla R = \nabla\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}}}\nabla\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right)$$

$$\nabla R = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}}}\nabla\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right)$$

$$\nabla R = \frac{1}{2R}\left(2\left(\vec{R} - \vec{v}\left(\vec{R}\cdot\nabla t_r\right)\right) + 2\vec{R}\times(\vec{v}\times\nabla t_r)\right)$$

$$\nabla R = \frac{\left(\vec{R} - \vec{v}\left(\vec{R}\cdot\nabla t_r\right)\right) + \vec{R}\times(\vec{v}\times\nabla t_r)}{R}$$

Dada a propriedade do produto triplo vetorial,

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

temos que

$$\vec{R}\times(\vec{v}\times\nabla t_r) = \left(\vec{R}\cdot\nabla t_r\right)\vec{v} - \left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)\nabla t_r$$

portanto,

$$\nabla R = \frac{\left(\vec{R} - \vec{v}\left(\vec{R}\cdot\nabla t_r\right)\right) + \left(\vec{R}\cdot\nabla t_r\right)\vec{v} - \left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)\nabla t_r}{R}$$

$$\nabla R = \frac{\vec{R} - \left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)\nabla t_r}{R}$$

Utilizando a equação

$$\nabla R = -c\nabla t_r$$

Obtemos

$$-c\nabla t_r = \frac{\vec{R} - (\vec{R}\cdot\vec{v})\nabla t_r}{R}$$

$$-c\nabla t_r = \hat{R} - (\hat{R}\cdot\vec{v})\nabla t_r$$

$$\hat{R} = (-c + \hat{R}\cdot\vec{v})\nabla t_r$$

$$\nabla t_r = \frac{\hat{R}}{-c + \hat{R}\cdot\vec{v}}$$

$$\nabla t_r = \left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\vec{R}}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

Temos, portanto,

$$\nabla R = -c\nabla t_r$$

$$\nabla R = -c\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\vec{R}}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

$$\nabla R = \frac{\vec{R}}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

Para calcular $\nabla(\vec{R}\cdot\beta)$, utilizaremos a seguinte identidade

$$\nabla(\vec{R}\cdot\beta) = (\vec{R}\cdot\nabla)\beta + \vec{R}\times(\nabla\times\beta) + (\beta\cdot\nabla)\vec{R} + \beta\times(\nabla\times\vec{R})$$

O primeiro fator $(\vec{R}\cdot\nabla)\beta$ é obtido da mesma forma que a expressão

$$(\vec{R}\cdot\nabla)\beta = \left((R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k})\cdot\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)\beta$$

$$= \left(R_x\frac{\partial}{\partial x} + R_y\frac{\partial}{\partial y} + R_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\beta$$

$$= R_x\frac{d\beta(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y\frac{d\beta(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z\frac{d\beta(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{c}\left(R_x\vec{a}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y\vec{a}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z\vec{a}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\vec{a}(t_r)}{c}(\vec{R}\cdot\nabla t_r)$$

Utilizando

$$\nabla t_r = \left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\vec{R}}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

Encontramos

$$(\vec{R}\cdot\nabla)\beta = \frac{\vec{a}(t_r)}{c}(\vec{R}\cdot\nabla t_r)$$

$$(\vec{R}\cdot\nabla)\beta = \frac{\vec{a}(t_r)}{c}\left[\vec{R}\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\vec{R}}{R - \vec{R}\cdot\beta}\right]$$

$$(\vec{R}\cdot\nabla)\beta = -\frac{R^2\frac{\vec{a}}{c^2}}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

O termo $\vec{R}\times(\nabla\times\beta)$ pode ser calculado seguindo os mesmos passos realizados para determinar a expressão

$$\nabla\times\vec{r}(t_r) = -\vec{v}\times\nabla t_r$$

tal que

$$\nabla\times\beta = -\frac{\vec{a}}{c}\times\nabla t_r$$

$$\nabla\times\beta = -\frac{\vec{a}}{c}\times\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\vec{R}}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

$$\nabla\times\beta = \frac{\frac{\vec{a}}{c^2}\times\vec{R}}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

logo

$$\vec{R}\times(\nabla\times\beta) = \frac{\vec{R}\times\frac{\vec{a}}{c^2}\times\vec{R}}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

Sabendo que

$$\vec{R} \times \frac{\vec{a}}{c^2} \times \vec{R} = (\vec{R} \cdot \vec{R}) \frac{\vec{a}}{c^2} - \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c^2}\right) \vec{R}$$
$$= R^2 \frac{\vec{a}}{c^2} - \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c^2}\right) \vec{R}$$

Portanto,

$$\vec{R} \times (\nabla \times \beta) = \frac{R^2 \frac{\vec{a}}{c^2} - \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c^2}\right) \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \beta}$$

O terceiro termo, $(\beta \cdot \nabla)\vec{R}$, utilizando com base a expressão deduzida

$$(\vec{R} \cdot \nabla)\vec{R} = \vec{R} - \vec{v}(\vec{R} \cdot \nabla t_r)$$

Temos

$$(\beta \cdot \nabla)\vec{R} = \beta - \vec{v}(\vec{R} \cdot \nabla t_r)$$
$$(\beta \cdot \nabla)\vec{R} = \beta - \vec{v}\left(\vec{R} \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \beta}\right)$$
$$(\beta \cdot \nabla)\vec{R} = \frac{\beta R}{R - \vec{R} \cdot \beta}$$

O último termo $\beta \times (\nabla \times \vec{R})$, temos da expressão

$$\nabla \times \vec{R} = \vec{v} \times \nabla t_r$$
$$= \vec{v} \times \left(\left(-\frac{1}{c}\right) \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \beta}\right)$$

$$= -\frac{\beta \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \beta}$$

$$\beta \times (\nabla \times \vec{R}) = \beta \times \left(-\frac{\beta \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \beta}\right)$$

$$\beta \times (\nabla \times \vec{R}) = -\left(\frac{\beta \times \beta \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \beta}\right)$$

$$\beta \times (\nabla \times \vec{R}) = -\left(\frac{(\beta \cdot \vec{R})\beta - (\beta \cdot \beta)R}{R - \vec{R} \cdot \beta}\right)$$

$$\beta \times (\nabla \times \vec{R}) = \frac{\beta^2 \vec{R} - (\beta \cdot \vec{R})\beta}{R - \vec{R} \cdot \beta}$$

Assim, a equação

$$\nabla(\vec{R} \cdot \beta) = (\vec{R} \cdot \nabla)\beta + \vec{R} \times (\nabla \times \beta) + (\beta \cdot \nabla)\vec{R} + \beta \times (\nabla \times \vec{R})$$

Fica

$$\nabla(\vec{R} \cdot \beta) = -\frac{R^2 \frac{\vec{a}}{c^2}}{R - \vec{R} \cdot \beta} + \frac{R^2 \frac{\vec{a}}{c^2} - \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c^2}\right)\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \beta} + \frac{\beta R}{R - \vec{R} \cdot \beta} + \frac{\beta^2 \vec{R} - (\beta \cdot \vec{R})\beta}{R - \vec{R} \cdot \beta}$$

$$\nabla(\vec{R} \cdot \beta) = \frac{\beta R - \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c^2}\right)\vec{R} + \beta^2 \vec{R} - (\beta \cdot \vec{R})\beta}{R - \vec{R} \cdot \beta}$$

Assim, reunindo as expressões que encontramos.

$$\nabla\phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R - \vec{R} \cdot \beta)^2}\left(\frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \beta} - \frac{\beta R - \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c^2}\right)\vec{R} + \beta^2 \vec{R} - (\beta \cdot \vec{R})\beta}{R - \vec{R} \cdot \beta}\right)$$

$$\nabla\phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R - \vec{R} \cdot \beta)^3}\left(\vec{R} - \beta R + \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c^2}\right)\vec{R} + \beta^2 \vec{R} + (\beta \cdot \vec{R})\beta\right)$$

$$\nabla\phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{R} + \left(\vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c^2}\right)\vec{R} + \left[\left(\beta\cdot\vec{R}\right) - R\right]\beta}{\left(R - \vec{R}\cdot\beta\right)^3}$$

Determinando a derivada temporal de $\vec{A}$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{v(t_r)}{R - \vec{R}\cdot\beta}$$

temos

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 qc}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v(t_r)}{R - \vec{R}\cdot\beta}\right) = \frac{\mu_0 qc}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta}{R - \vec{R}\cdot\beta}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 qc}{4\pi}\left(\frac{1}{R - \vec{R}\cdot\beta}\frac{\partial\beta}{\partial t} - \frac{\beta}{\left(R - \vec{R}\cdot\beta\right)^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(R - \vec{R}\cdot\beta\right)\right)$$

Como já sabemos temos que

$$\vec{R} = \vec{r} - \overrightarrow{r_q}(t_r)$$

e que

$$t_r = t - \frac{R}{c}$$

portanto

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r} - \overrightarrow{r_q}(t_r)\right) = -\frac{\partial\overrightarrow{r_q}(t_r)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial t} = -\vec{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

Para R, a derivada temporal é

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}}}\left(\vec{R}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial t} + \vec{R}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\vec{R}}{R}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial t}$$

Desta forma, com

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial t} = -\vec{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

Teremos

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\vec{R}}{R}\cdot\left(-\vec{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\left(\hat{R}\cdot\vec{v}(t_r)\right)\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

Sabemos que

$$R = |\vec{r} - \vec{r}(t_r)| = c(t - t_r)$$

portanto,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(c(t - t_r)\right) = c\left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right)$$

Comparando as equações, obtemos

$$-\left(\hat{R}\cdot\vec{v}(t_r)\right)\frac{\partial t_r}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right)$$

$$-\left(\hat{R}\cdot\beta(t_r)\right)\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \left(\hat{R}\cdot\beta\right)}$$

Substituindo o termo acima nas equações

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\vec{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

E

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\left(\hat{R} \cdot \vec{v}(t_r)\right)\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

Obtemos

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\vec{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t} = -\vec{v}(t_r)\left(\frac{1}{1-\left(\hat{R} \cdot \beta\right)}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\frac{\vec{v}(t_r)}{1-\left(\hat{R} \cdot \beta\right)}$$

e

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\left(\hat{R} \cdot \vec{v}(t_r)\right)\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\hat{R} \cdot \vec{v}(t_r)}{1-\left(\hat{R} \cdot \beta\right)}.$$

Derivando β, temos

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\vec{a}}{c}\frac{1}{1-\left(\hat{R} \cdot \beta\right)}$$

Onde a é a aceleração da partícula no tempo retardado t_r. Por fim, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(R - R\cdot\beta) = \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}\cdot\beta - \vec{R}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}$$

$$= \frac{\hat{R}\cdot\vec{v}}{1-(\hat{R}\cdot\beta)} + \frac{\vec{v}\cdot\beta}{1-(\hat{R}\cdot\beta)} - \frac{\vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c}}{1-(\hat{R}\cdot\beta)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(R - R\cdot\beta) = \frac{\vec{v}\cdot\beta - \hat{R}\cdot\vec{v} - \vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c}}{1-(\hat{R}\cdot\beta)}$$

Portanto,

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c q}{4\pi}\left(\frac{1}{R-\vec{R}\cdot\beta}\frac{\frac{\vec{a}}{c}}{1-(\hat{R}\cdot\beta)} - \frac{\beta}{\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)^2}\frac{\vec{v}\cdot\beta - \hat{R}\cdot\vec{v} - \vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c}}{1-(\hat{R}\cdot\beta)}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c q}{4\pi}\left(\frac{R\frac{\vec{a}}{c} - R(\vec{R}\cdot\beta)}{\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)^2} - \frac{R\beta\left(\vec{v}\cdot\beta - \hat{R}\cdot\vec{v} - \vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c}\right)}{\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)^3}\right)$$

Como $c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$, podemos escrever $\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0}$, logo

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{R\frac{\vec{a}}{c} - \left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)}{\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)^3} - \frac{cR\beta\left(\beta\cdot\beta - \hat{R}\cdot\beta - \vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c^2}\right)}{\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)^3}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R\frac{\vec{a}}{c^2}\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)}{\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)^3} - \frac{R\beta\left(\beta^2 - \hat{R}\cdot\beta - \vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c^2}\right)}{\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)^3}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2\frac{\vec{a}}{c^2} - R(\vec{R}\cdot\beta)\frac{\vec{a}}{c^2} - R\vec{R}\beta^2 + R\beta(\hat{R}\cdot\beta) + R\beta\left(\vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c^2}\right)}{\left(R-\vec{R}\cdot\beta\right)^3}$$

Dado o campo elétrico,

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

substituindo os resultados encontrados de $\nabla\phi$ *e* $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, obtemos

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\vec{R} + \left(\vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c^2}\right)\vec{R} + \left[\left(\beta\cdot\vec{R}\right) - R\right]\beta}{\left(R - \vec{R}\cdot\beta\right)^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2\frac{\vec{a}}{c^2} - R\left(\vec{R}\cdot\beta\right)\frac{\vec{a}}{c^2} - R\vec{R}\beta^2 + R\beta\left(\hat{R}\cdot\beta\right) + R\beta\left(\vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c^2}\right)}{\left(R - \vec{R}\cdot\beta\right)^3}$$

Ou

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(1-\beta^2)\vec{R} - R\beta(1-\beta^2)}{\left(R - \vec{R}\cdot\beta\right)^3} + \frac{\left(\vec{R}\cdot\frac{\vec{a}}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \beta\vec{R}\right) - \vec{R}\cdot\left(\vec{R} - R\beta\right)\frac{\vec{a}}{c^2}}{\left(R - \vec{R}\cdot\beta\right)^3}\right)$$

E então,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\left(\vec{R}(t) - \vec{R}(t)\beta(t_r)\right)\left(1-\beta^2(t_r)\right)}{\left(R(t) - \vec{R}(t)\cdot\beta(t_r)\right)^3} + \frac{\vec{R}(t)\times\left(\left(\vec{R}(t) - \vec{R}(t)\beta(t_r)\right)\times\vec{a}(t_r)\right)}{c^2\left(R(t) - \vec{R}(t)\cdot\beta(t_r)\right)^3}\right)$$

que é o campo elétrico de Liénard-Wiechert. Para o campo magnético temos a seguinte relação

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\hat{R}(t_r)}{c}\times\vec{E}(\vec{r},t).$$